TEKST NR 448 2006

LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE

Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse

Mogens Niss og Mogens Brun Heefelt

3. januar 2006

TEKSTER fra

IMFUFA ROSKILDE UNIVERSITETSCENTER
INSTITUT FOR STUDIET AF MATEMATIK OG FYSIK SAMT DERES FUNKTIONER I UNDERVISNING, FORSKNING OG ANVENDELSER

IMFUFA
Roskilde Universitetscenter
Postboks 260
DK-4000 Roskilde

t +45 46 74 22 63
f +45 46 74 30 20
m imfufa@ruc.dk
w imfufa.ruc.dk

Mogens Niss og Mogens Brun Heefelt: LINEÆR ALGEBRA OG ANALYSE. Noter til den naturvidenskabelige basisuddannelse.

IMFUFA tekst nr. 448/2006 149 sider issn 0106-6242

ABSTRACT

Denne tekst 'Lineær algebra og analyse' har taget udgangspunkt i IMFUFA-tekst nr. 200/1990 med samme titel og forfattet af min kollega Mogens Niss. I forhold til den oprindelige tekst er der sket en del mindre revisioner og udvidelser samt suppleret med et ekstra kapitel. Tillige er der som appendix lagt forslag til afsluttende miniprojekter.

Sigtet med teksten er fortsat at give en indføring i grundlæggende dele af den lineære algebra og teorien for lineære differentialligningssystemer. Begge dele bliver motiveret med og bragt i spil over for forskellige anvendelsesområder fra andre naturvidenskabelige fagområder. Det er samtidigt tilstræbt at fremstillingen er matematisk stringent - ikke at forveksle med kedelig - sådan at langt de fleste påstande bliver bevist. Bliver en påstande ikke bevist vil det fremgå af teksten, men i øvrigt er ordet 'bevis' ikke strøet ud over siderne, selv om der aktuelt faktisk bevises en påstand.

Hovedtrækkene i indholdet fremgår af indholdsfortegnelsen. Den lineære algebra udspiller sig i starten kun inden for reelle talrum. Siden overføres hele det udviklede apparatur til komplekse talrum, hvor især diagonalisering af reelle matricer får en vigtig udvidelse. Endelig transporteres dele af apparaturet videre til funtionsrum af hensyn til teorien for lineære differentialligningssystemer, der nu kan drage fordel af hele den præsenterede lineære algebra.

Til denne tekst er knyttet en opgavesamling som udsendes som et seperat hæfte.

Mogens Brun Heefelt
januar 2006

Indhold

1 Motiverende indledning til beskæftigelsen med lineær algebra

Meget kort kan man sige, at den matematiske emnekreds **Lineær Algebra** beskæftiger sig med studiet af fænomenerne/begreberne **proportionalitet** og **additivitet**. Begge dele er grundlæggende både for en kvantitativ (matematisk) behandling af dele af *virkeligheden*, og for opbygningen af en lang række *matematiske discipliner*. **Linearitet**, som er det begreb der sammenfatter proportionalitet og additivitet, er således væsentlig såvel for matematikkens *anvendelse* gennem *matematisk modelbygning* som for *matematikken* selv.

1.1 Eksemplet: KAGEBAGNING

Lad os allerførst se på en hjemlig situation. Til en fest skal der bages marmorkage og nogle vaniljekranse. I følge opskriften skal der til marmorkagen bruges 250g smør, 250g mel, 250g sukker, 5 æg (ca. 250g) og 30g kakao. Efter bagningen, der jo giver anledning til et vist svind på grund af fordampning, er der ca. 900g marmorkage. Til vaniljekransene benyttes 180g smør, 250g mel, 125g sukker, 1 æg (ca. 50g) samt vaniljekorn (ca. 5g).

For at kunne overskue situationen omregner vi råvareforbruget til 1kg færdig kage af hver slags. Vi kan nu sammenfatte råvareforbruget til de to slags kager i et skema, hvor alle tal er angivet i gram:

	marmorkage	vaniljekranse
smør	278	327
mel	278	455
sukker	278	227
æg	278	91
kakao	33	0
vaniljekorn	0	9

Hvis det nu besluttes at lave nogle andre mængder marmorkage og småkager kan vi gøre forbruget af ingredienser op ved hjælp af skemaet. Skal vi bage x_1 kg marmorkage og x_2 kg vaniljekranse, er der brug for (i gram):

smør	$278x_1 + 327x_2$
mel	$278x_1 + 455x_2$
sukker	$278x_1 + 227x_2$
æg	$278x_1 + 91x_2$
kakao	$33x_1 + 0x_2$
vaniljekorn	$0x_1 + 9x_2$

Nu kan det jo tænkes, at der ikke er tid - eller penge - til at købe ind i til kagerne, men at vi må klare os med det vi har i skabet. Der er måske (i gram):

smør	350
mel	800
sukker	500
æg	300
kakao	100
vaniljekorn	10

Spørgsmålet 'Kan vi bage marmorkage og småkager, sådan at vi lige netop bruger alle ingredienserne op?' er måske ikke realistisk i almindelig husholdning - mere herom lige straks - men matematisk formuleret lyder spørgsmålet: 'Findes x_1 og x_2 så

$$\begin{aligned}
300 &= 278x_1 + 327x_2 \\
800 &= 278x_1 + 455x_2 \\
500 &= 278x_1 + 227x_2 \\
300 &= 278x_1 + 91x_2 \\
100 &= 33x_1 + 0x_2 \\
10 &= 0x_1 + 9x_2 \text{ ?'}
\end{aligned}$$

Der er altså tale om et system af 6 ligninger med to ubekendte x_1 og x_2. Nu er svaret på det stillede spørgsmål tydeligvis 'nej', da man af de to sidste ligninger straks kan se, at de eneste mulige kandidater er $x_1 = \frac{100}{33}$ og $x_2 = \frac{10}{9}$, som imidlertid ikke passer ind i nogen af de andre ligninger. Det skulle da også være mærkeligt om de kageingredienser man tilfældigvis har på lager netop skulle kunne bruges op i bagningen af marmorkage og vaniljekranse.

For en privat husholdning ville et mere relevant spørgsmål være, hvordan vi med de forhåndenværende ingredienser kan bage marmorkage og vaniljekranse på den 'bedste måde'. Det er ikke klart hvad 'bedste måde' skal betyde. Det afhænger af vores interesser i sagen og en række dertil knyttede valg. Én betydning kunne være, at det samlede restlager af ingredienser efter bagningen er så lille som muligt - vi skulle måske ud at rejse. En måske mere nærliggende mulighed var at få bagt så meget som muligt i alt - vi vil gerne hælde så meget kage som vi kan skaffe i halsen på gæsterne. Begge problemstillinger kan formuleres matematisk. Vi nøjes med den sidste - forsøg selv med den første, bagefter.

Vi søger den eller de kombinationer af - ikke-negative (naturligvis) - x_1 og x_2 (hvis der overhovedet findes nogen), som maksimerer $x_1 + x_2$ under den betingelse at vi ikke bruger flere ingredienser end vi har, dvs så at

$$
\begin{aligned}
300 \geq & \quad 278x_1 + 327x_2 \\
800 \geq & \quad 278x_1 + 455x_2 \\
500 \geq & \quad 278x_1 + 227x_2 \\
300 \geq & \quad 278x_1 + 91x_2 \\
100 \geq & \quad 33x_1 + 0x_2 \\
10 \geq & \quad 0x_1 + 9x_2.
\end{aligned}
$$

Dette problem er et eksempel på en meget general klasse af problemer af stor praktisk betydning, de såkaldte **lineære programmeringsproblemer**. De væsentligste metoder til behandling af sådanne problemer stammer fra den lineære algebra.

I det foreliggende simple tilfælde er det ikke påkrævet med de store matematiske armsving - men nok nogle små - for at konkludere, at det optimale er at producere 1.009 kg marmorkage og 0.213 kg vaniljekranse, hvis det gælder om at have mest muligt gods til gæsterne. Af skemaet ovenfor kan vi dernæst uden videre beregne forbruget af de enkelte ingredienser.

1.2 Eksemplet: BAGERIET

Vi skal nu løfte blikket noget og undersøge en **generalisering** af det simple eksempel vi netop har behandlet. Tankegangen er faktisk den samme som i forrige eksempel, men fordi problemstillingen formuleres mere generelt kommer der nye momenter ind i sagen.

Et industribageri producerer forskellige slags brød og kager ved anvendelse af forskellige slags råvarer: diverse melsorter, sukker, smør, margarine, gær, kakao mm. Lad os sige at der i bageriet benyttes i alt *n forskellige råvarer*, og at der produceres i alt *p forskellige produkter*.

Ser vi først på *produkt nr. 1* kan vi tænke os, at der for at producere 1 kg af varen skal benyttes a_{11} kg af råvare nr. 1, a_{21} kg af råvare nr. 2, og så fremdeles op til a_{n1} kg af råvare nr. n. I tallet a_{k1}, $k = 1, 2, \ldots, n$, står altså det første index, k, for råvarenummeret, mens det andet index, 1, står for produktnummeret. Selve tallet a_{k1} står så for det antal kg af råvare nr.k der indgår i opskriften for 1 kg af produkt nr. 1.

På tilsvarende måde kan vi anskue situationen for de øvrige produkter. Hvis k betegner *råvarenummeret* og m betegner *produktnummeret* skal der til 1 kg af *produkt nr. m bruges a_{km} kg af råvare nr. k*. Bemærk, at det ikke er givet at summen af råvarerne, $a_{1m} + a_{2m} + \ldots + a_{nm}$, er lig 1, fordi produktionsprocessen - dvs bagningen - ikke nødvendigvis finder sted under massebevarelse, jfr forrige eksempel. Bemærk også, at i følge sagens natur må alle $a_{km} \geq 0$. Denne restriktion er imidlertid ikke væsentlig for det principielle i sagen.

Vi kan sammenfatte situationen ved hjælp af en tabel. Hver **søjle** repræsenterer et bestemt produkt, hver **række** en bestemt råvare. Tallene i en søjle angiver så hvor mange kg af de forskellige råvare der skal til for at producere 1 kg af produktet med det pågældende søjlenummer:

	1	2	...	p
1	a_{11}	a_{12}	...	a_{1p}
2	a_{21}	a_{22}	...	a_{2p}
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$
n	a_{n1}	a_{n2}	...	a_{np}

Hvis nu bageriet ønsker at fremstille x_1 kg af produkt nr. 1, x_2 kg af produkt nr.2 osv op til x_p kg af produkt nr. p, kan vi bestemme hvor meget der skal benyttes af hver af de n råvare. Af *råvare nr.1* skal der bruges i alt (i kg)

$$y_1 = a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p.$$

Tilsvarende af råvare nr. 2

$$y_2 = a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p, \tag{1.1}$$

osv indtil

$$y_n = a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p.$$

Vi kan repræsentere situationen ved en kortfattet skrivemåde, en art stenogram:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

(Læg mærke til, at fordi n og p ingenlunde behøver at være ens, er antallet af elementer i x-søjlen ikke nødvendigvis det samme som i y-søjlen, selv om det typografisk kunne se sådan ud).

'Stenogrammet' ovenfor skal fortolkes således: Bageriets *opskrifter* på brød og kager repræsenteres af a-erne i skemaet, hvor hver søjle angår ét bestemt produkt. For i bageriet at producere de varemængder som repræsenteres af x-søjlen skal der benyttes de råvaremængder som repræsenteres af y-søjlen. Vi kan altså fortolke a-skemaet som *produktionsgangen*, x-søjlen som det ønskede *produktionsresultat* og y-søjlen som det dertil svarende *råvarebehov.*

Hvad nu hvis bageriet den ene dag ønsker at producere varer svarende til søjlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{med råvarebehovet} \quad \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

og den anden dag svarende til søjlen

$$\begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} \quad \text{med råvarebehovet} \quad \begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix}$$

Hvad er så det samlede råvarebehov for de to dage? Ja det er jo trivielt. Det samlede råvarebehov er selvfølgelig

$$\begin{pmatrix} y_1 + y'_1 \\ y_2 + y'_2 \\ \vdots \\ y_n + y'_n \end{pmatrix}.$$

Med denne indsats af råvare fremstilles ialt produkterne

$$\begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_p + x'_p \end{pmatrix}.$$

Det er på denne baggrund nærliggende at **aftale en konvention for addition** - en aftale er jo nødvendig; det står ikke i Grundloven, hvordan man skal lægge søjler sammen:

Søjler af *samme dimensioner* kan adderes - det sker pladsvis, dvs:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_p + x'_p \end{pmatrix}$$

og tilsvarende for y-søjlerne.

I stedet for at udføre produktionen to forskellige dage - med adskilte sæt af råvare, henholdsvis produkter - kunne den have været udført samme dag (vi går ud fra at bageriets kapacitet - maskiner, ovne, arbejdskraft mv - tillader det). Opskrifterne - altså a-skemaet - er de samme, så forholdene må kunne sammenfattes i skemaet:

$$\begin{pmatrix} y_1 + y'_1 \\ y_2 + y'_2 \\ \vdots \\ y_n + y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x'_1 \\ x_2 + x'_2 \\ \vdots \\ x_p + x'_p \end{pmatrix}.$$

Samtidigt har vi jo efter den netop opstillede konvention, at

$$\begin{pmatrix} y_1 + y_1' \\ y_2 + y_2' \\ \vdots \\ y_n + y_n' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \\ \vdots \\ y_n' \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

Ved at sammenholde de to udtryk for $y + y'$-søjlen slutter vi, at

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 + x_1' \\ x_2 + x_2' \\ \vdots \\ x_p + x_p' \end{pmatrix} =$$
$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ \vdots \\ x_p' \end{pmatrix}.$$

Argumentet for det resultat vi netop er nået frem til trak på vores forestillinger om bagning osv. Men resultatet kan også afprøves ved direkte udregning, ud fra betydningen af skemaopstillingen, jfr (1.1) på side 4. Den typiske plads, lad os sige den i'te, i søjlen der kommer ud af venstresiden af (1.2), er jo efter forskriften side 4:

$$a_{i1}(x_1 + x_1') + a_{i1}(x_2 + x_2') + \ldots + a_{ip}(x_p + x_p') =$$
$$(a_{i1}x_1 + a_{i1}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p) + (a_{i1}x_1' + a_{i1}x_2' + \ldots + a_{ip}x_p').$$

På den højre side af lighedstegnet får vi på den i'te plads i søjlen svarende til første klump af (1.2)

$$a_{i1}x_1 + a_{i1}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p.$$

Tilsvarende for den anden klump af (1.2)

$$a_{i1}x_1' + a_{i1}x_2' + \ldots + a_{ip}x_p'.$$

I alt bliver den i'te plads i resultatsøjlen for højresiden af (1.2)

$$(a_{i1}x_1 + a_{i1}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p) + (a_{i1}x_1' + a_{i1}x_2' + \ldots + a_{ip}x_p'),$$

som jo netop stemmer overens med resultatet for venstresiden af (1.2).

Nu har vi allerede indført én operation **addition af søjler** af reelle tal. Vi har altså udvidet det sædvanlige additionsbegreb for tal til at omfatte en ny slags objekter - *søjler* *af tal.* Men vi har også vist at vi kunne indføre en slags operation af et rektangulært talskema - a-skemaet - på en talsøjle, da vi jo ved at foreskrive et bestemt produktionsresultat - x-søjlen - kan beregne det dertil svarende råvarebehov - y-søjlen - givet et sæt opskrifter. Resultatet af operationen af et talskema på en søjle (der skal have lige så mange elementer som talskemaet har søjler) bliver en ny søjle (med lige så mange elementer som talskemaet har rækker). Vi så at denne operation er **additiv** - hvis vi opererer på en sum af to søjler, bliver resultatet en sum af de resultater der kommer ud af at operere på de to søjler hver for sig. Det som opererer på søjler (altså sæt af produkter) er talskemaet bestående af a-erne (altså produktionsgangen, opskrifterne).

Også andre reguleringer af bageriets produktion er nærliggende. Det kunne fx tænkes at man af en eller anden grund (fx sæsonsvingninger) ønskede at øge eller mindske hele produktionen med en bestemt faktor a, som vi for fortolkningens skyld må have til at være ikke-negativ. I stedet for at indstille produktionen på at fremstille søjlen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

repræsenterende bageriets forskellige varer, vil man producere søjlen

$$\begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_p \end{pmatrix}$$

Hele produktionen skal altså være a gange så stor som før [Obs! a kan godt være mindre end 1]. Produktionen skal altså finde sted i en ny **skala**. Så ville det være naturligt at aftale skrivemåden

$$a \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix} \quad \text{i stedet for} \quad \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_p \end{pmatrix}$$

Vi siger at den nye søjle er **proportional** med den gamle. Vi har faktisk herved indført en nye operation på søjler - multiplikation med et reelt tal. Tallet kaldes i sammenhængen en **skalar**, fordi den bestemmer skalaen af produktionen. Operationen kaldes rimeligt nok **skalarmultiplikation**. Til forskel fra sædvanlig multiplikation med tal, der jo ud fra to objekter af samme art - tal - skaffer et tredie objekt af samme art, så vedrører skalarmultiplikation to objekter af forskellig art - et tal og en søjle - og resultatet af multiplikationen bliver en søjle.

Vi vil nu undersøge hvilke konsekvenser kravet om en a gange så stor produktion får for råvarebehovet. Overvejer man bageprocesser et øjeblik er det en rimelig antagelse - men ikke en naturlov - at hvis produktionen skal skaleres med faktoren a må råvareforbruget også skaleres med den samme faktor for alle råvarer

$$a\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \quad \text{i stedet for} \quad \begin{pmatrix} ay_1 \\ ay_2 \\ \vdots \\ ay_n \end{pmatrix}$$

hvoraf - da vi jo har

$$\begin{pmatrix} ay_1 \\ ay_2 \\ \vdots \\ ay_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_p \end{pmatrix}$$

og

$$a\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

- det sluttes at

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} ax_1 \\ ax_2 \\ \vdots \\ ax_p \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1p} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{np} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}.$$

Også dette resultat kan skaffes ved regulær udregning! Den i'te plads i venstresidens søjle er

$$a_{i1}(ax_1) + a_{i2}(ax_2) + \ldots + a_{ip}(ax_p) = a(a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \ldots + a_{ip}x_p).$$

Indholdet i parentesen er netop hvad der står på den i'te plads i søjlen svarende til højresiden før multiplikation med a.

Dette viser at den indførte operation mellem en søjle og et talskema er en **proportionalitet**, dvs den fører en skaleret søjle over i den pågældende skalar ganget med resultatet af operationen på søjlen før skalering.

1.3 Indskud med visse konklusioner på eksemplet: BAGERIET

Ud fra det foregående kan vi se, at vores betragtninger over hvordan bageriets produktion foregår, fører til at vi må hæfte os ved addition og skalarmultiplikation af talsøjler, såvel som ved operationer mellem et talskema og en talsøjle, som har den egenskab at være additiv og skalarmultiplikativ.

Selv om den valgte skrivemåde med talskemaer og -søjler giver en forenkling i forhold til den oprindelige skrivemåde a la (1.1), er der dog meget at skrive (det føler man ikke mindst når man selv har tæsket i klaviaturet). En yderligere forenkling vil være ønskelig.

Vi aftaler derfor (noget énvejs, må jeg indrømme), at vi i stedet for x-søjlen og y-søjlen - som altså stadig har forskellig længde - skriver $\underline{x}$ og $\underline{y}$, uanset længden, og i stedet for a-skemaet skriver symbolet A. Så kan vi kort notere det hidtil fundne som

$$\underline{y} = A\underline{x},$$

og, idet vi har indført hvad $\underline{x} + \underline{x}'$ og $a\underline{x}$ (a en skalar) skal betyde, har vi at

$$A(\underline{x} + \underline{x}') = A\underline{x} + A\underline{x}'$$
$$A(a\underline{x}) = aA\underline{x}.$$

Analogien med sædvanlig regning med tal og parenteser er tydelig. Der er simpelthen tale om en *generalisation* heraf, for hvis A, $\underline{x}$ og $\underline{x}'$ alle kun består af ét tal, står der ganske enkelt tal i formellinierne ovenfor.

Vi vil kalde talskemaet A, bestående af et antal *rækker* (n) og et antal *søjler* (p), for en **matrix**, nærmere bestemt en $n \times p$-**matrix**. Søjler er en speciel slags talskemaer, matricer med kun én søjle. De hidtil betragtede x-søjler er $p \times 1$-matricer, mens y-søjlerne er $n \times 1$-matricer. Operationen af talskemaer (matricer) på søjler (en speciel slags matricer) er et specialtilfælde af **matrixmultiplikation**. På dette sted skal vi ikke forfølge dette nærmere; det vil der blive rigelig anledning til senere i kurset. Vi skal dog gøre én vigtig observation allerede nu: Hvis en matrix skal multipliceres med en søjle (fra højre), må søjlen have præcis lige så mange rækker (elementer) som matricen har søjler. Resultatet af multiplikationen bliver en søjle med netop så mange rækker som matricen har rækker. I uformelt symbol-sprog: "$n \times p$" $\cdot$ "$p \times 1$" $=$ "$n \times 1$".

Vi afslutter bageri-eksemplet med et par kommentarer. Det vi indtil nu har foretaget os i eksemplet kan sammenfattes således: Til et givet input (her kravet til produktionsresultatet, $\underline{x}$) frembringes et output (her råvareforbruget, $\underline{y}$) ved hjælp af en bestemt operation (her oversættelsen af produktionskrav til råvarekrav, repræsenteret af matrixidentiteten $\underline{y} = A\underline{x}$). Imidlertid kan man i industribageriet spørge: Givet en bestemt mængde råvare - altså en søjle $\underline{y}$ - hvilken produktion kan da realiseres med disse råvare?

Hvis råvarerne skal bruges op inden for den betragtede periode - hvilket ikke er urealistisk et krav, når man betænker problemerne med friskhed, investeringer, lagerplads osv - kan spørgsmålet formuleres:

Givet $\underline{y}$, findes der da et $\underline{x}$, så at $\underline{y} = A\underline{x}$? Skriver vi dette spørgsmål ud i deltaljer - i overensstemmelse med (1.1) på side 4 lyder det: Givet

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \quad \text{findes da} \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_p \end{pmatrix}$$

så at

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &= y_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p &= y_n? \end{aligned}$$

Hvis svaret er ja (det er det faktisk ikke altid, som eksemplet: KAGEBAGNING viste), hvordan ser sådanne sæt $(x_1, x_2, \ldots, x_p)$ ud, og hvor mange slags er der? Hvis der er flere sæt, hvilke(t) er så det 'bedste' i en eller anden henseende som må være præciseret nærmere? Vi har med andre ord at gøre med et ligningssystem. På grund af ligningssystemets struktur, jfr behandlingen ovenfor, kaldes det for et **lineært ligningssystem**. Undersøgelserne af sådanne er en væsentlig sag for den lineære algebra.

Er det nu ikke noget krav at råvarerne bruges op inden for den betragtede periode, men blot at der ikke bruges mere af nogen råvare end der er til rådighed, kan man stille spørgsmålet:

Givet $\underline{y}$, findes der da et $\underline{x}$, så at $\underline{y} \geq A\underline{x}$? I detaljer:

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1p}x_p &\leq y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2p}x_p &\leq y_2 \\ &\vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{np}x_p &\leq y_n? \end{aligned}$$

Igen kan man, hvis der er flere løsninger $\underline{x}$ - og der er der ofte - spørge hvilken der i en eller anden henseende er 'bedst'. I så fald har vi at gøre med et **lineært programmeringsproblem**. Også dette er en sag for den lineære algebra.

1.4 Eksemplet: AFSTEMNING AF KEMISKE LIGNINGER

At lineære ligningssystemer optræder i andre sammenhænge end ved brød- og kagefremstilling - fx inden for kemien - skal belyses nu.

Vi betragter en simpel kemisk reaktion, hvis kvalitative indhold antages kendt, men hvor koefficienterne i første om gang er ubestemte:

$$?HgI_4^{--} + ?OH^- + ?NH_3 \rightarrow ?Hg_2NI + ?I^- + ?H_2O.$$

Opgaven er at sætte koefficienter ind i denne ligning. I gymnasiet benytter man sædvanligvis en metode baseret på de såkaldte iltnings- og oxidationstrin. Denne metode er imidlertid ofte lidt uigennemskuelig, fordi den hviler på en række spilleregler der ikke alle har et klart fysisk-kemisk grundlag. Det viser sig nu at man kan afstemme denne og alle andre reaktionsligninger ud fra ét alment princip: Antallet af atomer af hvert stof skal være det samme på begge sider af reaktionspilen, og tilsvarende med antallet af ladninger - regnet med fortegn, naturligvis. Kalder vi de seks ubekendte koefficienter for $x_1, x_2, \ldots, x_6$ kan vi skrive reaktionsligningen

$$x_1 HgI_4^{--} + x_2 OH^- + x_3 NH_3 \rightarrow x_4 Hg_2 NI + x_5 I^- + x_6 H_2O,$$

hvor opgaven nu er at bestemme alle seks x-er.

Hvis altså antallet af atomer for et givet grundstof skal være det samme på begge sider, skal der først for *Hg* gælde

$$x_1 = 2x_4.$$

Tilsvarende for I bliver

$$4x_1 = x_4 + x_5.$$

Fortsættes med henholdsvis O, H og N får vi de tilhørende ligninger

$$x_2 = x_6, \quad x_2 + 3x_3 = 2x_6, \quad x_3 = x_4.$$

Nu resterer der kun at holde regnskab med ladningerne, hvilket giver

$$2x_1 + x_2 = x_5.$$

Fordi dette ligningssystem (tilfældigvis?) er så simpelt, kan det hurtigt reduceres til et ligningssystem i få ubekendte som det er let at finde direkte. Alligevel vil vi for at bane vejen for behandling af mere komplicerede situationer skrive systemet alment op, nemlig således

$$\begin{array}{rrrrrrl}
x_1 & & & -2x_4 & & & = 0 \\
4x_1 & & & -\ x_4 & -x_5 & & = 0 \\
 & x_2 & & & & -\ x_6 & = 0 \\
 & x_2 & +3x_3 & & & -2x_6 & = 0 \\
 & & x_3 & -\ x_4 & & & = 0 \\
2x_1 & +x_2 & & & -x_5 & & = 0
\end{array}$$

Benyttes den notation vi udviklede i det foregående eksempel, har vi at gøre med ligningen på matrixform

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & -2 & 0 & 0 \\ 4 & 0 & 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 3 & 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

eller kort $A\underline{x} = \underline{0}$, A er den opskrevne 6×6-matrix.

Hvad angår løsninger til ligningssystemet er det umiddelbart klart, at sættet $(x_1, x_2, \ldots, x_6) = (0, 0, \ldots, 0)$ - vi burde skrive begge sæt som søjler - bestående af lutter nuller er en løsning. Fra et kemisk synspunkt er dette ikke videre ophidsende, al den stund ingen af de pågældende stoffer overhovedet ville foreligge. Det er imidlertid også klart, at hvis $(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6)$ er én løsning til systemet, vil også ethvert skalarmultiplum $a(x'_1, x'_2, \ldots, x'_6)$ - hvor a er en skalar - af dette sæt være en løsning. Dette beror selvsagt på at højresiden af ligningssystemet er nulsøjlen. Ellers ville det netop sagte være forkert.

Ved hjælp af lineær algebra bliver vi i stand at afklare løsningsforholdene for lineære ligningssystemer - også det ovenstående. Det vil da vise sig - prøv selv at indse det - at samtlige løsninger til ligningssystemet har formen

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ x_6 \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 1 \\ 7 \\ 3 \end{pmatrix},$$

hvor t er et vilkårligt reelt tal.

Nu giver det for en realistisk kemisk fortolkning kun mening at operere med t-er hentet fra de naturlige tal; og her siger tallet 1 det væsentlige. Alle andre naturlige tal giver blot et multiplum af alle de indgående stoffer.

I alt får den afstemte ligning skikkelsen

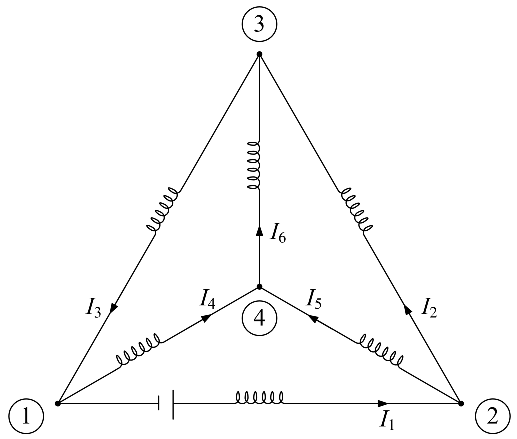
$$2HgI_4^{--} + 3OH^- + NH_3 \rightarrow Hg_2NI + 7I^- + 3H_2O.$$

Selvfølgelig ville dette være et noget stort apparat at opstille blot for at afstemme en enkelt simpel kemisk ligning. Men pointen er at metoden virker for alle mulige reaktionsligninger - også hvis der forløber flere koblede reaktioner på én gang - men især at metoden ikke hviler på kemisk uigennemskuelige fremstillinger eller begreber - kun på det helt basale: grundstofbevarelse og ladningsbevarelse. For øvrigt giver metoden også mulighed for at klassifisere reaktionsligninger på kemisk relevante måder ved hjælp af strukturen i det tilsvarende ligningssystem.

1.5 Eksemplet: KIRCHHOFF's LOVE FOR ELEKTRISKE KREDSLØB

I elektricitetslæren lærer man at for jævnstrømskredsløb er i ligevægt må det opfylde bla den såkaldte *Kirchhoff's 1. lov:*

Ved hver knude skal summen af de indgående strømme være lig summen af de udgående strømme.



Figur 1.1 Et elektrisk kredsløb.

Lad os betragte det kredsløb som er angivet på figur 1.1, hvor de indcirklede tal angiver knuderne. Ifølge Kirchhoff's 1. lov gælder så

$$\begin{array}{llll} \text{knude 1:} & I_3 = I_1 + I_4 & \qquad \text{knude 3:} & I_2 + I_6 = I_3 \\ \text{knude 2:} & I_1 = I_2 + I_5 & \qquad \text{knude 4:} & I_4 + I_5 = I_6 \end{array}$$

Dette ligningssystem kan fremstilles på matrixform, idet vi med $\underline{I}$ betegner søjlen bestående af elementerne $I_1, I_2, \ldots, I_6$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

eller kort $M\underline{I} = \underline{0}$. Der er altså tale om et lineært ligningssystem med 4 ligninger og 6 ubekendte.

1.6 Eksemplet: UDVIKLING AF MARKEDSANDELE

Lad os forstille os et geografisk område, hvis pilsnerforbrug dækkes af tre bryggerier, X, Y og Z. Bryggeriernes markedsandele, som er foranderlige, gøres op hver måned, og opgaven er at beskrive udviklingen heraf gennem tiden. Vi går ud fra en begyndelsessituation i måned nr. 0 med markedsandelene henholdsvis

$$x_0,\ y_0,\ z_0 \quad \text{for} \quad X,\ Y \text{ og } Z,$$

hvor x_0, y_0 og z_0 alle er tal i intervallet [0,1]. Idet vi går ud fra at de tre bryggerier dækker hele områdets forbrug i den betragtede periode, har vi

$$x_0 + y_0 + z_0 = 1.$$

I måned nr. n betegnes markedsandelene med x_n, y_n og z_n, $n = 1, 2, 3, \ldots$

Vi antager nu at bryggeriet X hver måned er i stand til at fastholde brøkdelen a_{11} ($0 \leq a_{11} \leq 1$) af sine egne kunder, desuden at vinde brøkdelen a_{12} ($0 \leq a_{12} \leq 1$) af Y's kunder og brøkdelen a_{13} ($0 \leq a_{13} \leq 1$) af Z's kunder. Hvis det samlede antal pilsnerkunder i området er konstant lig N, vil bryggeri X i måned nr. 1 have et antal kunder der er lig

$$a_{11}(x_0 N) + a_{12}(y_0 N) + a_{13}(z_0 N).$$

På den anden side er antallet af X's kunder i måned nr. 1 også lig $x_1 N$, så at

$$x_1 N = a_{11}(x_0 N) + a_{12}(y_0 N) + a_{13}(z_0 N).$$

Ved at forkorte med N finder vi X's markedsandel i måned nr. 1

$$x_1 = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0.$$

På tilsvarende måde får vi for de andre bryggerier - med de oplagte fortolkninger af a_{ij}-erne, at a_{ij} angiver den brøkdel af kunderne fra bryggeri nr. j (hvor 1 står for X, 2 for Y og 3 for Z) som bryggeri nr. i vinder/fastholder i løbet af en måned:

$$\begin{aligned} y_1 &= a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0 \\ z_1 &= a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0. \end{aligned}$$

Med den tidligere indførte matrix-notation får vi

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix}$$

eller kort,

$$\underline{v}_1 = A\underline{v}_0,$$

hvor betydningen af $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_0$ er oplagt.

Tallene i søjle nr. j i A angiver de tre brøkdele som bryggeri nr. j fastholder og afgiver af kunder i en måned. Hvis der ikke er andre bryggerier der betjener området, må summen af tallene i hver søjle i A være 1. Søjle nr. j angiver jo hvilken skæbne bryggeri nr. j's kunder undergår ved overgang til næste måned; de kan forblive hos j eller overtages af ét af de andre. En matrix med denne egenskab kaldes ofte for en **overgangsmatrix**, fordi den - som det fremgår kan beskrive overgangen fra én periode til en anden.

Under antagelse af at mønstret fastholdes gennem tiden, kan vi fortsætte processen

$$\begin{aligned} \underline{v}_2 &= A\underline{v}_1 = A(A\underline{v}_0), \\ &\vdots \\ \underline{v}_n &= A(A(\ldots(A\underline{v}_0)\ldots)). \end{aligned}$$

Helt i analogi med vores sædvanlige notation med potenser skriver vi gerne

$$\underline{v}_n = A^n \underline{v}_0.$$

Det er her nærliggende at interessere sig for den langsigtede udvikling af denne proces, dvs hvad der sker for $n \to \infty$. Også den slags spørgsmål behandles af den lineære algebra, som ved at give kriterier baseret på udseendet af A kan fortælle om udviklingen i sådanne processer. Det viser sig bla, at under den forudsætning at alle A's elementer er strengt positive, vil processen i det lange løb nærme sig en situation hvor de tre bryggeriers markedsandele er konstante.

1.7 Eksemplet: ALDERSSTRUKTUREREDE POPULATIONER

Ved undersøgelser af biologiske populationer er det ofte væsentligt at de enkelte individer i gennem deres livsløb befinder sig i forskellige klasser. Det kan fx være at de gennemløber forskellige biologiske stadier - fx larve, puppe og sommerfugl. Det kan også være at man af udefra kommende grunde kan have interesse at 'anbringe' individerne i klasser - fx fisk efter alder (der jo er forbundet med længde og vægt) af hensyn til bestandens størrelse, fangstregler eller lignende forhold.

Vi betragter nu en sådan aldersstruktureret population. Lad os antage at den er inddelt i $k+1$ klasser med numrene $0, 1, 2, \ldots, k$. Den 0'te klasse består af de yngste individer. Rekrutteringen til denne klasse sker sædvanligvis ved fødsel. Den første klasse består af individer der er én enhed ældre. Der kan være tale om tidsenheder som dage, måneder, år, men også blot om selve klasserne, uanset om hvor lang tid kreaturerne befinder sig i hver af dem. Rekrutteringen til første klasse sker ved at individerne rykker ind i den efter at have gennemløbet 0'te klasse - og så fremdeles indtil den sidste klasse. Sædvanligvis består denne af de ældste levende individer, og klassen forlades ved død. Men mindre drastiske muligheder kan komme på tale, fx hvis man er interesseret i at følge bestandsudviklingen på forskellige trin i en folkeskole.

Lad os gå ud fra, at vi har at gøre med en population hvis individer kan tælles. Det er egentlig ikke afgørende, men letter forståelsen af det følgende. Vi kunne lige så godt have opereret med biomasse. Vi er interesseret i at følge den tidslige udvikling i størrelsen af populationen og dens forskellige klasser. Med $n_0(t)$ betegner vi antallet af individer i klasse 0 til tiden t. Med $n_1(t)$ antallet i klasse 1, og så fremdeles indtil $n_k(t)$ i klasse k Vi tager udgangspunkt i forholdene til begyndelsestidspunktet $t = 0$.

Først vil vi se på rekrutteringen til klasse 0. Den finder sted ved fødsel, dvs ved at individerne i de øvrige klasser formerer sig. Det er rimeligt at gå ud fra, at hver klasse giver et bidrag til de nyfødte som er proportionalt med antallet af individer i klassen. Proportionalitetsfaktoren vil være forskellig fra klasse til klasse og kan godt være 0. Med $f_0, f_1, \ldots, f_k$ angiver vi de forskellige proportionalitetsfaktorer. Bogstavet f er valgt for at angive fertilitet, altså det gennemsnitlige antal nyfødte pr. individ i den pågældende klasse.

Antallet af individer i klasse 0 til tid 1 vil så være

$$n_0(1) = f_0 n_0(0) + f_1 n_1(0) + \ldots + f_k n_k(0).$$

Rekrutteringen til klasserne $1, \ldots, k$ sker simpelthen ved at individerne fra den foregående klasse rykker op. Det kan altså ikke i denne model forekomme at nogen bliver i deres klasse ved overgangen til en ny periode. Det antages at der er en fast opryknings-/overlevelsesrate fra hver klasse, sådan at en bestemt brøkdel af individerne fra klasse j rykker op i klasse $j+1$, resten dør eller forlader systemet på anden måde. Vi kan antage, at brøkdelen p_0 af individer fra klasse 0 rykker op i klasse 1, mens brøkdelen p_1 af individer fra klasse 1 rykker op i klasse 2, osv. Individerne der til tid 0 befandt sig i klasse k antages at have forladt populationen til tid 1, jfr bemærkningerne ovenfor. Derved får vi

$$\begin{aligned} n_1(1) &= p_0 n_0(0), \\ n_2(1) &= p_1 n_1(0), \\ &\vdots \\ n_k(1) &= p_{k-1} n_{k-1}(0). \end{aligned}$$

De individer der til tid 0 befandt sig i klasse k antages at have forladt populationen til tid 1 - som før nævnt.

De opskrevne relationer beskriver altså overgangen fra tid 0 til tid 1. Relationerne kan samles på matrixform således

$$\begin{pmatrix} n_0(1) \\ n_1(1) \\ n_2(1) \\ \vdots \\ n_k(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0(0) \\ n_1(0) \\ n_2(0) \\ \vdots \\ n_k(0) \end{pmatrix}.$$

En sådan matrix, L, kaldes en **Leslie-matrix** efter den første person der - i 40'erne - indførte den til populationsbeskrivelse.

Forestiller man sig at dette mønster er uændret til alle tidspunkter, får vi den generelle overgangsmekanisme beskrevet ved

$$\begin{pmatrix} n_0(t+1) \\ n_1(t+1) \\ n_2(t+1) \\ \vdots \\ n_k(t+1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} f_0 & f_1 & \ldots & f_{k-1} & f_k \\ p_0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & p_1 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & p_{k-1} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} n_0(t) \\ n_1(t) \\ n_2(t) \\ \vdots \\ n_k(t) \end{pmatrix}.$$

eller kort

$$\underline{n}(t+1) = L\underline{n}(t), \quad t = 0, 1, 2, \ldots$$

På samme måde som i det foregående eksempel finder vi

$$\underline{n}(t+1) = L^{t+1}\underline{n}(0).$$

De spørgsmål man her ville stille om den langsigtede udvikling af populationen og dens klasser er de samme som i eksempelet: UDVIKLING AF MARKEDSANDELE. Det matematiske apparat til besvarelse af dem er de samme: *lineær algebra*.

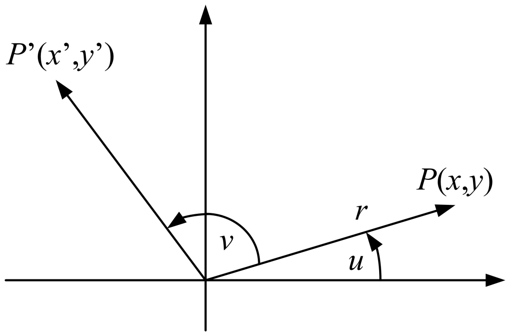
1.8 Eksemplet: GEOMETRISKE TRANSFORMATIONER

Vi vil slutte denne motiverende indledning med at undsersøge et par geometriske transformationer i planen.

Først **rotation** om et punkt med en bestemt vinkel. Vi forestiller os et koordinatsystem indlagt, så rotationens centrum er koordinatsystemets begyndelsespunkt - se figur 1.2. Hvis punktet P har koordinaterne (x, y), kan disse skrives som

$$(x, y) = (rcosu, rsinu),$$

hvor r er afstanden fra P til begyndelsespunktet O, og u er den vinkel vektoren $\underline{PO}$ danner med førsteaksen. Med rotation med vinklen v føres P over i punktet P' med koordinaterne



Figur 1.2 Rotation om et punkt.

$$\begin{aligned}(x', y') &= (rcos(u + v), rsin(u + v))\\ &= (rcosu\, cosv - rsinu\, sinv, rsinu\, cosv + rcosu\, sinv)\\ &= (xcosv - ysinv, ycosv + xsinv),\end{aligned}$$

(det mellemste lighedstegn følger af additionsformlerne for cos og sin), altså er

$$\begin{aligned}x' &= cosv\, x - sinv\, y\\ y' &= sinv\, x + cosv\, y\end{aligned}$$

og i matrixnotation

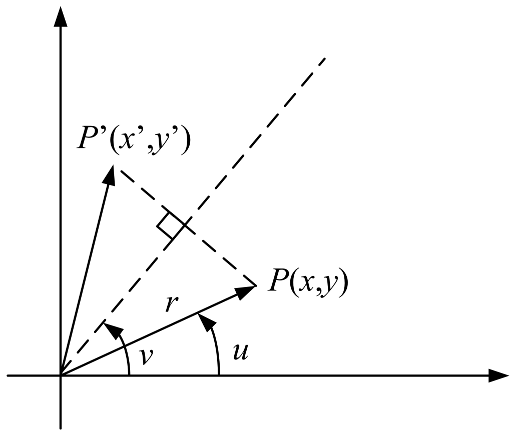
$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cosv & -sinv \\ sinv & cosv \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

En rotation i planen med vinklen v omkring koordinatsystemets begyndelsespunkt er altså beskrevet ved at punktetes nye koordinater fremgår af de gamle ved en bestemt *lineær transformation* af de gamle.

Dernæst betragter vi en **spejling** i en linie gennem begyndelsespunktet. Har P igen koordinaterne

$$(x, y) = (rcosu, rsinu),$$

vil det spejlede punkt P' have koordinaterne, se figur 1.3



Figur 1.3 Spejling i en linie.

$$\begin{aligned}(x', y') &= (rcos(2v - u), rsin(2v - u)) \\ &= (rcos2v\,cosu + rsin2v\,sinu, rsin2v\,cosu - rcos2v\,sinu) \\ &= (xcos2v + ysin2v, xsin2v - ycos2v).\end{aligned}$$

Derved får vi

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} cos2v & sin2v \\ sin2v & -cos2v \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

der igen er en **lineær transformation** af koordinaterne.

Ser vi sluttelig på en **multiplikation** ud fra koordinatsystemets begyndelsespunkt med en bestemt faktor a, bliver punktet P med koordinaterne (x, y) overført i punktet P' med koordinaterne (ax, ay). Også denne transformation er *lineær*, beskrevet ved

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

2 Lineære ligningssystemer 1

Det er en af den lineære algebras opgaver at levere en teori for løsningsforholdene ved lineære ligningssystemer. Som det første led i opbygningen af en sådan teori vil vi betragte et par eksempler, som både viser hvordan man rent praktisk griber løsningen af et lineært ligningssystem an og viser at der kan optræde forskellige karakteristiske tilfælde.

Eksempel 1

Vi betragter ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{2.1}$$

Vi er ude på at omforme dette ligningssystem til ét hvor løsningsforholdene er lettere at overskue. Idéen er at eliminere x_1 fra samtlige ligninger bortset fra den øverste. Derved danner de to sidste ligninger et selvstændigt ligningssystem kun bestående af de to sidste ligninger med to ubekendte. På dette mindre ligningssystem kan vi nu foretage en tilsvarende omformning ved - her - at fjerne x_2 fra *alle* ligninger på nær den anden. Dette bevirker, at x_3 bliver den eneste ubekendte tilbage i den tredie ligning, som derfor umiddelbart bliver løsbar - om overhovedet. Denne skridtvise elimination viser sig at være anvendelig som generel løsningsmetodik ved alverdens lineære ligningssystemer - ikke blot det aktuelle. Metoden bærer navnet **Gauss-elimination** efter én af den nyere tids mest betydningsfulde matematikere, tyskeren Carl Frederich Gauss (1777-1855). Benytter vi nu metoden som den er beskrevet, får man:

Ligningssystemet er ensbetydende med følgende ligningssystem, der er fremkommet ved at det oprindelige ved at den anden ligning er erstattet med den selv *plus den første ligning multipliceret med* -2, mens den første ligning selv er uberørt:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned} \tag{2.2}$$

Fra dette nye system kan vi komme tilbage til det oprindelige system ved at udføre den 'modsatte operation' - dvs at multiplicere den første ligning med $+2$ og derefter addere den til den anden ligning. De to systemer er altså virkelig ensbetydende (ækvivalente).

Nu foretages en tilsvarende operation på system (2.2) med den hensigt at bortskaffe x_1-leddet i den tredie ligning. Den første ligning multipliceres med $\frac{1}{2}$ og adderes til den tredie - den første ligning er stadig uberørt. Derved får vi:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned} \tag{2.3}$$

Dette ligningssystem er ensbetydende med (2.2) - med argumenter magen til de ovenstående: vi kan komme tilbage til (2.2) ved på (2.3) at udføre den modsatte operation, bestående i til tredie ligning at lægge den første multipliceret med $-\frac{1}{2}$. System (2.2) er på sin side ensbetydende med (2.1). System (2.3) er altså ensbetydende med det oprindelige system.

Nu skaffer vi os af med x_2-leddet i den sidste ligning i (2.3) ved at multiplicere den anden ligning med $\frac{1}{4}$ og addere den til den tredie. Det giver det ækvivalente ligningssystem:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 4x_3 &= 1 \\ - \quad x_3 &= \frac{9}{4} \end{aligned} \tag{2.4}$$

Herved har vi opnået at omforme det oprindelige ligningssystem (2.1) til et ensbetydende, men meget simplere ligningssystem (2.4), der er på **trappeform**. Det trappeformede ligningssystem er simplere fordi det kan løses umiddelbart ved optrævling nedefra:

Af den nederste ligning ses straks at $x_3 = -\frac{9}{4}$. Dette indsættes i den anden ligning, som så kun indeholder den ubekendte x_2, der bestemmes til $x_2 = -\frac{5}{2}$. Sluttelig bestemmes x_1 af den første ligning ved indsættelse af de fundne værdier for x_2 og x_3. Vi finder til slut $x_1 = -\frac{13}{8}$.

Denne analyse viser os at ligningssystemet (2.1), bestående af tre ligninger med tre ubekendte, har én og kun én løsning - eller for at være lidt mere pedantisk: ét og kun ét løsningssæt - nemlig:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{13}{8}, -\frac{5}{2}, -\frac{9}{4})$$

Det gik jo fint. Gad vist om det altid er så nemt? Lad os prøve med nogle flere eksempler.

Eksempel 2

Ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + \quad x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 - 2x_2 + 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

adskiller sig kun fra det tidligere system (2.1) ved +'et foran x_3-leddet i den anden ligning. Går vi nu frem på samme måde som før finder vi:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 8x_3 &= 3 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

og videre:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 8x_3 &= 3 \\ x_2 - 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Multiplicerer vi nu den mellemste ligning med $\frac{1}{4}$ og lægger den til den sidste ligning, bliver resultatet

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ -4x_2 + 8x_3 &= 3 \\ 0\ x_3 &= \frac{9}{4}. \end{aligned}$$

Den sidste ligning har øjensynlig ingen løsning, og så meget mere vil hele systemet heller ikke have en løsning. Også her virkede metoden udmærket til at afklare løsningsforholdene, der er blot *ingen* løsning.

Men hermed er variationerne ikke udtømt. Endnu nogle eksempler.

Eksempel 3

Også ligningssystemet

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

adskiller sig kun ubetydeligt - ved +'et foran x_2-leddet i den anden ligning - fra det første system (2.1). Går vi igen til værks efter forskrifterne, når vi til:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_3 &= 1 \\ -x_1 + \frac{1}{2}x_2 - \frac{1}{2}x_3 &= \frac{3}{2} \end{aligned}$$

og derefter til:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_3 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Fulgte vi nu forskriften automatisk - og det skulle 'man' (fx i et computerprogram) jo gøre, hvis man ikke som her opererede på et konkret system med givne tal som koefficienter. På et generelt system med vikårlige og derfor principielt ukendte koefficienter - kunne vi ikke komme videre herfra. Efter forskriften skulle vi jo skaffe x_2-leddet væk fra den sidste ligning ved at multiplicere den mellemste ligning med en passende konstant og addere til den sidste ligning. Imidlertid er koefficienten til x_2-leddet i den mellemste ligning 0, mens x_2-koefficienten i den sidste ligning er forskellig fra 0, og derfor kan ingen multiplikation i verden klare den opgave. Hvad gør vi så?

I det forliggende tilfælde er sagen nemt ordnet - vi bytter blot de to sidste ligninger om, hvilket selvsagt ikke vil ændre systemet. Det ommøblede system er nu umiddelbart på trappeform:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ x_2 - 2x_3 &= 2. \\ 4x_3 &= 1 \end{aligned}$$

og kan let løses. Systemet har den entydgt bestemte løsning:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{3}{8}, \frac{5}{2}, \frac{1}{4}).$$

Dette eksempel viser, at den først beskrevne automatiske forskrift ikke virker i enhver situation. Den må åbenbart suppleres i visse undtagelsessituationer. Vi skal ikke her forfølge disse undtagelser nøjere. En total kortlægning af sådanne undtagelser er vigtige til teoretiske formål, og som baggrund for at konstruere computerprogrammer til løsning af lineære ligningssystemer. Til vores formål rækker det at demonstrere metoden og at antyde et behov for at supplere den i særlige situationer. Ved at gå frem som beskrevet kan man slippe levende igennem alle praktiske ligningsløsningssituationer.

Så meget om metoden! Hvad angår løsningsforholdene har vi allerede set, at fredelige og næsten ens udseende systemer af tre ligninger med tre ubekendte, kan udvise helt forskellige løsningsegenskaber - der kan være *netop én løsning*, og der kan *ingen løsninger* være. Er det nu alle muligheder? Nej, faktisk ikke:

Eksempel 4

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_1 + 2x_2 - 2x_3 &= 3 \\ 2x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 2. \end{aligned}$$

Udfører vi eliminationen af x_1 i de to sidste ligninger på én gang - hvilket øjensynligt er det samme som at foretage det i to skridt - får vi:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_3 &= 1 \\ 4x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Da de to sidste ligninger er ens, har vi i realiteten kun to ligninger med tre ubekendte:

$$\begin{aligned} 2x_1 + \ \ x_2 - 3x_3 &= 1 \\ 4x_3 &= 1. \end{aligned}$$

Af den sidste fremgår, at $x_3 = \frac{1}{4}$. Indsættes dette i den første ligning antager systemet formen:

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 \quad &= \frac{7}{4} \\ x_3 &= \frac{1}{4}. \end{aligned}$$

Her kan vi frit vælge hvad x_1 eller x_2 skal være, idet den anden så kan bestemmes. Sætter vi fx $x_2 = t$, hvor t er et vilkårligt reelt tal, så vil $x_1 = -\frac{1}{2}t + \frac{7}{8}$ og $x_2 = t$ løse den første ligning. Omvendt vil enhver løsning have denne form. Samlet har vi fundet, at systemet i eksempel 4 har løsningerne:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-\frac{1}{2}t + \frac{7}{8}, t, \frac{1}{4}),$$

hvor t er et vilkårligt reelt tal.

Ligningssystemet har altså *uendeligt mange løsninger*.

I behandlingen af tre ligninger med tre ubekendte har vi altså mødt tre forskellige løsningsmuligheder: **netop én løsning; ingen løsninger; uendeligt mange løsninger**. Det viser sig at netop ét af disse tilfælde altid vil indtræffe. Det er altså ikke muligt, at der er fx syv forskellige løsninger. Det viser sig også, at situationen er den samme *uanset hvor mange ligninger og hvor mange ubekendte der indgår i ligningssystemet*. Som en illustration afsluttes dette kapitel med endnu tre eksempler.

Eksempel 5

Ligningssystemet

$$\begin{aligned} -x_1 + \qquad\quad 2x_3 + \ \ x_4 - \ \ x_5 &= -1 \\ 2x_1 - \ \ x_2 - \ \ x_3 + \ \ x_4 + 3x_5 &= 1 \\ x_1 + 2x_2 - 3x_3 - 2x_4 + \ \ x_5 &= 0 \end{aligned} \tag{2.5}$$

består af tre ligninger med fem ubekendte. Løsningen af ligningssystemet gribes an på samme måde som i de foregående eksempler. Bestræbelsen er at nå frem til et ækvivalent ligningssystem, hvor den anden ligning ikke indeholder x_1 og den tredie ligning ikke indeholder x_1 og x_2. Vi starter med skaffe x_1 væk i de to sidste ligninger. Det sker ved til den anden ligning at lægge 2 gange den første, og ved til den tredie ligning at lægge den første. Vi foretager begge operationer på én gang. Derved når vi frem til det ensbetydende ligningssystem:

$$\begin{aligned} -x_1 + \qquad 2x_3 + \ \ x_4 - x_5 &= -1 \\ -x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= -1 \\ 2x_2 - \ \ x_3 - \ \ x_4 + \qquad &= -1 \end{aligned} \tag{2.6}$$

Nu skaffer vi x_2-leddet væk fra den sidste ligning i (2.6) ved til denne ligning at lægge 2 gange den mellemste ligning. Da er resultatet:

$$\begin{aligned} -x_1 + \phantom{x_2 + {}} 2x_3 + x_4 - x_5 &= -1 \\ -x_2 + 3x_3 + 3x_4 + x_5 &= -1 \\ 5x_3 + 5x_4 + 2x_5 &= -3 \end{aligned} \tag{2.7}$$

Hermed er vi nået frem til et ligningssystem på trappeform som er ækvivalent med (2.5). Vi kan ikke fortsætte forenklingsprocessen, fordi en bortskaffelse af x_3 i den sidste ligning vil genindføre x_1 eller x_2 i ligningen. Der er da heller ikke behov for yderligere forenkling, da systemet (2.7) kan løses uden videre. Uanset hvilke værdier x_4 og x_5 tildeles kan x_3 bestemmes af den sidste ligning, derefter bestemmes x_2 af den mellemste ligning og endelig x_1 af den første. Det betyder at man for *hvilke som helst reelle tal t og u*, vil få følgende løsninger til (2.5):

$$\begin{aligned} x_4 &= t \\ x_5 &= u \\ x_3 &= -\frac{3}{5} - t - \frac{2}{5}u && \text{(af sidste ligning)} \\ x_2 &= 3(-\frac{3}{5} - t - \frac{2}{5}u) + 3t + u + 1 && \text{(af den mellemste ligning med } x_3 \text{ indsat)} \\ &= -\frac{1}{5}u - \frac{4}{5} \\ x_1 &= 2(-\frac{3}{5} - t - \frac{2}{5}u) + t - u + 1 && \text{(af den første ligning med } x_3 \text{ indsat)} \\ &= -t - \frac{9}{5}u - \frac{1}{5} \end{aligned}$$

hvor t og u er vilkårlige reelle tal. Løsningssættet til systemet (2.5) kan også skrives på formen:

$$(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (-\frac{1}{5}, -\frac{4}{5}, -\frac{3}{5}, 0, 0) + t(-1, 0, -1, 1, 0) + u(-\frac{9}{5}, -\frac{1}{5}, -\frac{2}{5}, 0, 1).$$

Ethvert sæt af denne form er altså løsning til (2.5).

Hvis omvendt $(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$ er en løsning kan vi altid finde to reelle tal t og u, sådan at løsningen har den opskrevne form - vi skal jo blot sætte $t = x_4$ og $u = x_5$, så kan x_1, x_2 og x_3 i kraft af (2.7) ikke slippe for at have den ønskede form. Med udtrykkene ovenfor har vi altså bestemt samtlige løsninger til ligningssystemet (2.5). Læg mærke til at både x_4 og x_5 kan vælges frit - vi siger at de er to **frie variable** i løsningssættene. De tre øvrige er derefter bestemt - og vi siger at de er **bundne variable** i løsningssættene. Nu er det ikke sådan at netop x_4 og x_5 *skal* være frie variable, mens resten er bundne. Havde vi fx skrevet hver lignings venstreside op i modsat rækkefølge med x_5 først, dernæst x_4 osv og derefter havde benyttet os af trappeomformning, ville x_2 og x_1 være blevet de frie variable, mens de øvrige ville være bundne. Så friheden og bundetheden er ikke knyttet til *bestemte* af de ubekendte - det væsentlige i sagen er *antallet* af frie hhv bundne variable. Dette antal er *det samme* uanset den rækkefølge vi skriver leddene op i.

Eksempel 6

I ligningssystemet

$$\begin{aligned}
-2x_1 + \phantom{\frac{1}{2}}x_2 + 2x_3 &= 0 \\
-3x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 &= 4 \\
x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_3 &= -2 \\
-x_1 + \frac{5}{2}x_2 - x_3 &= 1
\end{aligned}$$

er der fire ligninger med tre ubekendte. Også i dette tilfælde er det vores bestræbelse at omforme systemet til et ækvivalent system på trappeform. Vi går frem på den foreskrevne måde ved først at skaffe x_1 væk i de sidste tre ligninger. Det foregår ved at der til den anden lægges den første ganget med $-\frac{3}{2}$, til den tredie den første ganget med $\frac{1}{2}$ og til den fjerde den første ganget med $-\frac{1}{2}$. Derved fremkommer det ækvivalente system:

$$\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\
-2x_2 - 4x_3 &= 4 \\
- x_2 + 2x_3 &= -2 \\
2x_2 - 2x_3 &= 1
\end{aligned}$$

Det sidste skridt består i at bortskaffe x_2 i de to sidste ligninger ved til den tredie at lægge $-\frac{1}{2}$ gange den anden, og ved til den fjerde at lægge den anden. Resultatet er så:

$$\begin{aligned}
-2x_1 + x_2 + 2x_3 &= 0 \\
-2x_2 - 4x_3 &= 4 \\
4x_3 &= -4 \\
-6x_3 &= 5
\end{aligned}$$

Af de to sidste ligninger ses at systemet *ingen løsninger* har, da x_3 ikke kan overkomme både at være -1 (den tredie ligning) og $-\frac{6}{5}$ (den fjerde ligning).

Eksempel 7

En minimal forandring i ligningssystemet fra eksempel 6 giver en helt anden løsningssituation. Hvis højresiden i den sidste ligning ændres til 2 har vi at gøre med systemet:

$$\begin{aligned}
-2x_1 + \phantom{\frac{1}{2}}x_2 + 2x_3 &= 0 \\
-3x_1 - \frac{1}{2}x_2 - x_3 &= 4 \\
x_1 - \frac{3}{2}x_2 + x_3 &= -2 \\
-x_1 + \frac{5}{2}x_2 - x_3 &= 2
\end{aligned} \tag{2.8}$$

De samme operationer som i eksempel 6 fører til:

$$\begin{aligned} -2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ - \ \ x_2 + 2x_3 &= -2 \\ 2x_2 - 2x_3 &= 2 \end{aligned}$$

og videre til:

$$\begin{aligned} -2x_1 + \ \ x_2 + 2x_3 &= 0 \\ -2x_2 - 4x_3 &= 4 \\ 4x_3 &= -4 \\ -6x_3 &= 6 \end{aligned}$$

Her er ingen modsætninger mellem de to sidste ligninger, som begge kræver, at $x_3 = -1$. Derefter finder vi straks $x_2 = 0$ og $x_1 = -1$, sådan at ligningssystemet (2.8) har *netop én løsning*, nemlig:

$$(x_1, x_2, x_3) = (-1, 0, -1)$$

Sagen er her, at ligningssystemet kun *tilsyneladende* består af fire ligninger. I *virkeligheden* er der kun tre uafhængige ligninger. Det forholder sig nemlig sådan, at den sidste ligning i (2.8) følger af de foregående tre, da den sidste ligning fås som sum af $\frac{1}{8}$ gange den første ligning, $-\frac{1}{4}$ gange den anden og $-\frac{3}{2}$ gange den tredie (det forventes du ikke at få øje på!).

De tre sidste eksempler viser, at også med ligningssystemer hvor antallet af ligninger ikke er lig antal ubekendte optræder de samme løsningsmuligheder: *ingen*, *netop én* eller *uendeligt mange* løsninger. I eksempel 5 så vi tillige at de uendeligt mange løsninger kan være fastlagt ved *flere* frie variable - eller flere *parametre*, som de også kaldes. Vi benytter også her den sprogbrug at løsningsmængden er *flerdimensional*.

Hermed har vi næsten afsluttet første omgang i behandlingen af lineære ligningssystemer. Flere omgange vil følge. Den indførte løsningsmetode med dens nødvendige modifikationer - som i alle tilfælde har kunnet afklare løsningsforholdene for ligningssystemerne - kan formuleres således: *Ligningssystemet omformes ved hjælp af* **rækkeoperationer**.

En *rækkeoperation* består i at en given ligning:

- bytter plads med en anden ligning
- erstattes af sig selv ganget med en skalar $\neq 0$
- erstattes af sig selv plus en anden ligning ganget med en skalar

Ved en rækkeoperation har det oprindelige og det omformede ligningssystem de samme løsninger - de er **ækvivalente**. Metoden har et automatisk præg, hvilket er en væsentlig del af pointen ved en metode. Ser vi nøjere på metoden som den fx er udfoldet i ligningssystemerne (2.1) - (2.4) kan man se, at de *ubekendte*, dvs x_1, x_2 og x_3, er uændrede i alle fire ligningssystemer. Det er kun *koefficienterne* til de ubekendte der bliver ændret, så metoden kan simplificeres yderligere ved kun at se på disse koefficienter. Vi opskriver nu koefficienterne i et talskema og opererer på rækkerne i talskemaer ligesom vi før opererede på ligninger i ligningssystemer. Derved kan ligningssystemerne (2.1) - (2.4) erstattes af følgende fire talskemaer:

$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 4 & -2 & -2 & 3 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ -1 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{3}{2} \end{array}\right) \mapsto$$
$$\left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \end{array}\right) \mapsto \left(\begin{array}{rrr|r} 2 & 1 & -3 & 1 \\ 0 & -4 & 4 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & \frac{9}{4} \end{array}\right)$$

Selv om vi nu har fundet en fornuftig løsningsmetode, skal det ikke forhindre os i at slippe lettere til en løsning, hvis det er muligt, fx hvis vi kan se sammenhænge mellem nogle af ligningerne.

3 Talrummene R^n.

3.1 Indledning

I begge de forrige kapitler har **sæt af reelle tal** spillet en central rolle. Vi skal nu foretage et systematisk studium af sådanne sæt og lineære operationer på dem.

I alt hvad der følger er n et vilkårligt naturligt tal - dvs $1, 2, \ldots$. De objekter vi interesserer os for er *ordnede* sæt af n reelle tal: $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. At sættet er ordnet betyder at rækkefølgen tallene optræder i er væsentlig. Det betyder - fx for $n = 4$ - at sættet $(1, -2, \frac{1}{2}, 0)$ er forskelligt fra sættet $(0, 1, \frac{1}{2}, -2)$. Sådanne objekter kalder vi **vektorer**, og undertiden n-vektorer hvis vi har behov for at understrege hvilket n der er på tale. Det kan fx være tilfældet hvis vektorer af forskellig længde er i spil. Man kan også støde på betegnelsen *ordnede n-sæt* eller *ordnede n-tupler*. De enkelte tal i en vektor - altså x-erne - kaldes ofte vektorens **komponenter**. Det fastsættes at to vektorer er ens, hvis deres komponenter på tilsvarende pladser er identiske.

Vi vil i mange sammenhænge benytte notationen $\underline{x}$ som forkortelse af $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, selv om det ikke af notationen fremgår hvilket n der refereres til. Det må underforstås af sammenhængen.

Samlingen af samtlige n-vektorer benævnes R^n. Vi har altså per definition

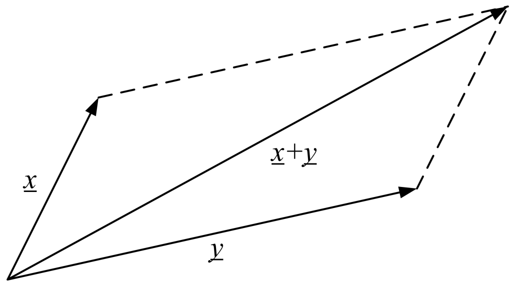
$$R^n = \{(x_1, x_2, \ldots, x_n) \mid x_1 \in R,\ x_2 \in R, \ldots, x_n \in R\}.$$

Vi taler her om **talrummet** R^n. Der findes en uendelighed af sådanne talrum - ét for hvert n. Hvis $n = 1$ har vi øjensynlig blot at gøre med R - de reelle tal selv. Hvis $n = 2$ eller $n = 3$ har vi at gøre med koordinatsættene for punkterne i *planen* henholdsvis *rummet*.

Som nævnt er det væsentligt at holde styr på *rækkefølgen* af tallene i en n-vektor. Derimod er det ikke væsentligt for de begreber vi snart skal indføre om vi opskriver en n-vektor som række eller søjle. Sådan er det jo ikke med matricer, som er rektangulære talskemaer hvor både den vandrette og den lodrette orden er væsentlig. **Rækkematricen** $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ er forskellig fra **søjlematricen**

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}.$$

De to forskellige matricer er forskellige *matrix-fremstillinger* af én og samme vektor. Vi vil ofte få brug for at fremstille en given vektor på begge måder - alt efter hvad der er bekvemt i sammenhængen. Men endnu en gang: I definitionen af en n-vektor er rækkefølgen af tallene væsentlig - ikke om de opskrives vandret eller lodret. I definitionen af matricer er både rækkefølgen og opskrivningen væsentlig.



Figur 3.1 Kræfternes parallellogram.

3.2 Addition af vektorer i R^n

Vi vil nu indfører et **additionsbegreb** for vektorer af samme størrelse. Med en nobel sprogbrug fra den abstrakte algebra vil vi indfører en **komposition** $+$ i R^n, dvs en operation der til to vilkårlige vektorer i R^n knytter en tredie - deres *sum*. Definitionen er lidet dybsindig, da vi simpelthen adderer to n-vektorer ved at addere komponenterne pladsvis:

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n).$$

Denne måde at indføre addition på er i R simpelthen den sædvanlige addition, mens den i R^2 og R^3 svarer til addition af geometriske vektorer - *kræfterne parallellogram* - jfr figur 3.1.

Det er en umiddelbar konsekvens af reglerne for addition af reelle tal, at man kan ombytte leddene i additionen:

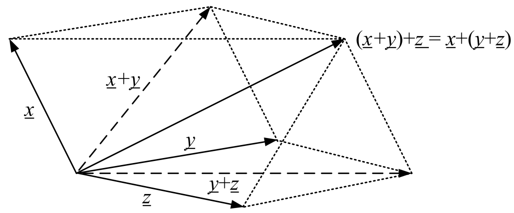
$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n) = (y_1, y_2, \ldots, y_n) + (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

- den såkaldte **kommutative lov** - og tillige at man frit kan sætte parenteserne således:

$$\begin{gathered}((x_1, x_2, \ldots, x_n) + (y_1, y_2, \ldots, y_n)) + (z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\ (x_1, x_2, \ldots, x_n) + ((y_1, y_2, \ldots, y_n) + (z_1, z_2, \ldots, z_n)).\end{gathered}$$

Denne sidste identitet kaldes **den associative lov**, hvis indhold i R^2 og R^3 kan fortolkes geometrisk, jfr figur 3.2. Både den kommutative og den associative lov bygger på at addition af vektorer foregår pladsvis.

Der findes hetop ét element som virker **neutralt ved addition**, dvs opfylder den egenskab, at den adderet til en vilkårlig vektor lader denne vektor uberørt. Vektoren bestående af lutter 0'er bestrider åbentbart dette job da



Figur 3.2 Geometrisk tolkning af den associative lov.

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (0, 0, \ldots, 0) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

for ethvert $(x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$. Ingen anden vektor har denne egenskab, da såfremt $(w_1, w_2, \ldots, w_n)$ opfylder

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (w_1, w_2, \ldots, w_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

må

$$(x_1 + w_1, x_2 + w_2, \ldots, x_n + w_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$$

Eftersom to vektorer er identiske netop hvis de har samme komponenter, har vi at

$$\begin{aligned} x_1 + w_1 &= x_1, \\ x_2 + w_2 &= x_2, \\ &\vdots \\ x_n + w_n &= x_n, \end{aligned}$$

Hvoraf det følger at $w_1 = 0,\ w_2 = 0,\ \ldots\ , w_n = 0$. Dette viser at

$$(w_1, w_2, \ldots, w_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Vektoren hvis alle komponenter er 0 kaldes **nulvektoren** og betegnes med $\underline{0}$ - så må det af sammenhængen fremgå hvilket n der er tale om.

Det er nu nærliggende at spørge om der til en given vektor $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ findes en anden vektor $(u_1, u_2, \ldots, u_n)$ der neutraliserer den, dvs opfylder

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (u_1, u_2, \ldots, u_n) = (0, 0, \ldots, 0).$$

Dette er jo ensbetydende med et søge $u_1, u_2, \ldots, u_n$ så

$$x_1 + u_1 = 0,\ \ x_2 + u_2 = 0,\ \ \ldots\ \ x_n + u_n = 0,$$

Disse krav er opfyldt hvis og kun hvis

$$u_1 = -x_1,\ \ u_2 = -x_2,\ \ \ldots\ \ u_n = -x_n.$$

Svaret er bekræftende, da

$$(u_1, u_2, \ldots, u_n) = (-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$$

som den eneste vektor opfylder det stillede krav. Vi kalder også $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$ for **den modsatte vektor** til $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, og betegner den

$$-(x_1, x_2, \ldots, x_n).$$

Det er nu muligt at benytte skrivemåden

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) - (y_1, y_2, \ldots, y_n)$$

for

$$(x_1, x_2, \ldots, x_n) + (-y_1, -y_2, \ldots, -y_n) = (x_1 - y_1, x_2 - y_2, \ldots, x_n - y_n).$$

Eksempel 1

I R^4 har vi vektorerne $\underline{x} = (2, -1, 0, 3)$, $\underline{y} = (-5, 2, -1, -2)$ og $\underline{z} = (3, -1, 1, -1)$. Det ses at $\underline{x} + \underline{y} = (-3, 1, -1, 1)$, og derfor er $-(\underline{x} + \underline{y}) = \underline{z}$. *

Omtalen af addition afsluttes ved at samle de fundne resultater i en kort notation:

Der indføres en komposition $+$ i R^n, som opfylder
(1) For alle $\underline{x}$ og $\underline{y}$: $\underline{x} + \underline{y} = \underline{y} + \underline{x}$ (den kommutative lov)
(2) For alle $\underline{x}$, $\underline{y}$ og $\underline{z}$: $(\underline{x} + \underline{y}) + \underline{z} = \underline{x} + (\underline{y} + \underline{z})$ (den associative lov)
(3) Der findes netop ét neutralt element $\underline{0}$ så der for alle $\underline{x}$ gælder

$$\underline{x} + \underline{0} = \underline{x}$$

(4) Ethvert $\underline{x}$ har netop ét modsat element, $-\underline{x}$, opfyldende at

$$\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$$

(Disse fire egenskaber udtrykkes ofte samlet sådan, at $(R^n, +)$ udgør en **abelsk gruppe**.)

Alene på grundlag af reglerne (1) - (4) kan det sluttes, at *enhver ligning* af formen $\underline{x} + \underline{a} = \underline{b}$ har *netop én løsning*, nemlig $\underline{x} = \underline{b} - \underline{a}$. At $\underline{b} - \underline{a}$ løser ligningen ses ved indsættelse. At der ikke er andre muligheder indses ved at addere $-\underline{a}$ (som jo eksisterer jfr (4)) til begge sider af ligningen $\underline{x} + \underline{a} = \underline{b}$, hvilket lidt pedansk opskrevet giver

$$\underline{x} = \underline{x} + (\underline{a} - \underline{a}) = (\underline{x} + \underline{a}) - \underline{a} = \underline{b} + (-\underline{a}) = \underline{b} - \underline{a}.$$

3.3 Skalarmultiplikation i R^n

Vektorer i R^n kan skaleres med reelle tal. Det vil sige, at der for enhver vektor $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in R^n$ og ethvert reelt tal α per definition dannes vektoren

$$\alpha\underline{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n)$$

Denne vektor siges at være fremkommet ved **skalarmultiplikation** af vektoren $\underline{x}$ med **skalaren** α. Som det ses er en skalar - *her* - ikke andet end et reelt tal. Betegnelsen 'skalar' i stedet for 'tal' tjener til at markere den indbyrdes *rollefordeling* mellem tal og vektorer.

Skalarmultiplikation er ikke som addition en komposition *inden for* R^n selv - det er en operation på et *tal* (fra R) og en *vektor* (fra R^n), med en *vektor* som resultat.

Et par vigtige egenskaber ved skalarmultiplikation følger uden videre af definitionen:

(5) For erhvert $\underline{x} \in R^n$ er

$$1\underline{x} = \underline{x}$$

(6) For ethvert $\underline{x} \in R^n$ og vilkårlige skalarer α og β gælder

$$\alpha(\beta\underline{x}) = (\alpha\beta)\underline{x}.$$

Dette se ved inspektion ud fra definitionen. Ad (5):

$$1\underline{x} = 1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (x_1, x_2, \ldots, x_n) = \underline{x}$$

og ad (6):

$$\alpha(\beta\underline{x}) = \alpha(\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n) = (\alpha\beta x_1, \alpha\beta x_2, \ldots, \alpha\beta x_n) = (\alpha\beta)\underline{x}.$$

Endvidere er det åbenbart at

$$0\underline{x} = \underline{0}$$

da $\quad 0(x_1, x_2, \ldots, x_n) = (0, 0, \ldots, 0) = \underline{0}$.

Vi mangler at undersøge hvordan skalarmultiplikationen spiller sammen med additionen i R^n. Der gælder **de distributive love**

(7) For vilkårlige $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i R^n og enhver skalar α er

$$\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}.$$

(8) For ethvert $\underline{x} \in R^n$ og vilkårlige skalarer α og β er

$$(\alpha + \beta)\underline{x} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{x}.$$

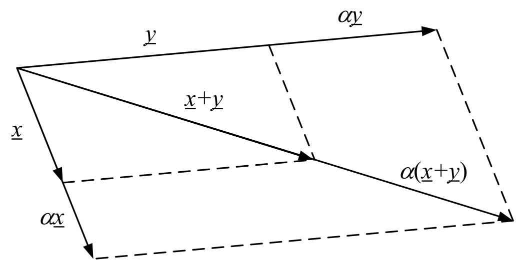
Disse love fortæller hvordan man kan 'gange ind i' og 'sætte uden for parentes' ved skalarmultiplikation, der involverer en sum af vektorer eller skalarer.

Også her overbeviser man sig om rigtigheden af påstandene ved simpel inspektion ud fra de indførte definitioner på addition og skalarmultiplikation. Prøv selv at gøre rede for hvilke definitioner eller love der ligger bag de enkelte lighedstegn. Ad (7):

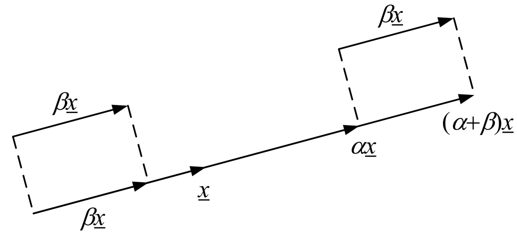
$$\begin{aligned}
\alpha(\underline{x} + \underline{y}) &= \alpha(x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n) \\
&= (\alpha(x_1 + y_1), \alpha(x_2 + y_2), \ldots, \alpha(x_n + y_n)) \\
&= (\alpha x_1 + \alpha y_1, \alpha x_2 + \alpha y_2, \ldots, \alpha x_n + \alpha y_n) \\
&= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\alpha y_1, \alpha y_2, \ldots, \alpha y_n) \\
&= \alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}.
\end{aligned}$$

Ad (8):

$$\begin{aligned}(\alpha+\beta)\underline{x} &= ((\alpha+\beta)x_1, (\alpha+\beta)x_2, \ldots, (\alpha+\beta)x_n) \\ &= (\alpha x_1 + \beta x_1, \alpha x_2 + \beta x_2, \ldots, \alpha x_n + \beta x_n) \\ &= (\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n) + (\beta x_1, \beta x_2, \ldots, \beta x_n) \\ &= \alpha\underline{x} + \beta\underline{x}.\end{aligned}$$



Figur 3.3 Illustration af formel (7).



Figur 3.4 Illustration af formel (8).

Det geometriske indhold i de distributive love (7) og (8) i R^2 og R^3 er illustreret i figur 3.3 og i figur 3.4.

Vi kan nu opsummere de de fundne grundregler for addition og skalarmultiplikatin i R^n:

(1) For alle $\underline{x}$ og $\underline{y}$: $\underline{x}+\underline{y}=\underline{y}+\underline{x}$ (den **kommutative** lov)
(2) For alle $\underline{x}$, $\underline{y}$ og $\underline{z}$: $(\underline{x}+\underline{y})+\underline{z}=\underline{x}+(\underline{y}+\underline{z})$ (den **associative** lov)
(3) Der findes netop ét **neutralt** element $\underline{0}$ så der for alle $\underline{x}$ gælder

$$\underline{x}+\underline{0}=\underline{x}$$

(4) Ethvert $\underline{x}$ har netop ét **modsat** element, $-\underline{x}$, opfyldende at

$$\underline{x} + (-\underline{x}) = \underline{0}$$

(5) For erhvert $\underline{x} \in R^n$ er

$$1\underline{x} = \underline{x}$$

(6) For ethvert $\underline{x} \in R^n$ og vilkårlige skalarer α og β gælder

$$\alpha(\beta\underline{x}) = (\alpha\beta)\underline{x}.$$

(7) For vilkårlige $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i R^n og enhver skalar α er

$$\alpha(\underline{x} + \underline{y}) = \alpha\underline{x} + \alpha\underline{y}.$$

(den **første distributive** lov)

(8) For ethvert $\underline{x} \in R^n$ og vilkårlige skalarer α og β er

$$(\alpha + \beta)\underline{x} = \alpha\underline{x} + \beta\underline{x}.$$

(den **anden distributive** lov).

Det at R^n er udstyret med en addition og en skalarmultiplikatin der opfylder (1) - (8) udtrykkes sædvanligvis ved at sige, at R^n med disse operationer er organiseret som et **vektorrum**. Undertiden ser man også betegnelsen *lineært rum*. Senere kommer vi til at studere andre objekt-verdener - end talrummene - der også kan organiseres som vektorrum.

Alle de grundlæggende lineære egenskaber ved talrummene kan udledes af (1) - (8). Når først disse egenskaber er etableret er det ikke længere nødvendigt at gå tilbage til udgangspunktet, dvs til selve definitionerne af addition og skalarmultiplikation. (Men hvis det nu og da viser sig bekvemt for os at gå tilbage til definitionerne, vil vi dog ikke afholde os fra det.) Som eksempel på hvordan man kan udlede resultater alene ved hjælp af (1) - (8) har vi allerede set resultatet om entydig ligningsløsning. Her er et par stykker til:

(a) Først ser vi på påstanden: For ethvert $x \in R^n$ gælder

$$0\underline{x} = \underline{0}$$

Denne påstand her vi ovenfor godtgjort ved at benytte definitionerne, men der er altså ikke nødvendigt, se selv

$$\underline{x} + 0\underline{x} = 1\underline{x} + 0\underline{x} = (1 + 0)\underline{x} = 1\underline{x} = \underline{x},$$

hvor vi har benyttet henholdsvis (5), (8), addition i R samt (5) endnu én gang. Adderes nu $-\underline{x}$ til begge sider af lighedstegnet, får vi

$$0\underline{x} = -\underline{x} + \underline{x} = \underline{0}.$$

(b) Dernæst kan vi bevise, at for ethvert $x \in R^n$ må

$$(-1)\underline{x} = -\underline{x}.$$

At påstanden skal bevises, hvis vi kun har (1) - (8) til rådighed skyldes, at $(-1)\underline{x}$ er fastlagt ved hjælp af skalarmultiplikation, mens $-\underline{x}$ er fastlagt i forhold til addition. Vi har igen ud fra (5), (8) og addition i R, at

$$\underline{x} + (-1)\underline{x} = 1\underline{x} + (-1)\underline{x} = (1 + (-1))\underline{x} = 0\underline{x} = \underline{0}.$$

Adderes også her $-\underline{x}$ til begge sider af lighedstegnet, finder vi som ønsket

$$(-1)\underline{x} = -\underline{x}.$$

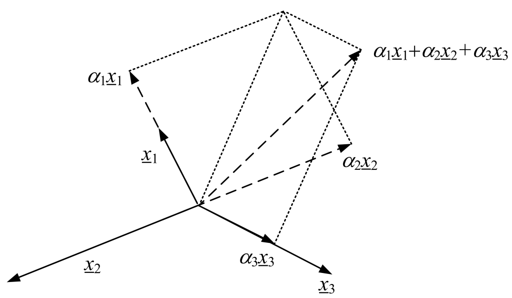
(Naturligvis kan dette resultat også opnås ved direkte at benytte den måde skalarmultiplikationen indføres på i R^n - men det er altså ikke pointen her.)

(c) Og så en liden **øvelse**: Vis alene på basis af (1) - (8), at $\alpha\underline{0} = \underline{0}$ for enhver skalar α. Vis på samme grundlag, at $k\underline{x} = \underline{x} + \underline{x} + \ldots + \underline{x}$ (k led) for ethvert naturligt tal k - som jo også er en skalar - og enhver vektor $\underline{x} \in R^n$.

3.4 Linearkombinationer

Hvis vi har givet et endeligt antal - fx k - vektorer i R^n, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$, kan vi danne nye vektorer af formen

$$\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{x}_k, \tag{3.1}$$



Figur 3.5 Eksempel på en linearkombination.

hvor $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$ er vilkårlige skalarer. Et sådant udtryk - en sum af skalerede vektorer - kaldes en **linearkombination** af vektorerne $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ med **koefficienterne** $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. I figur 3.5 ses et eksempel på en sådan linearkombination.

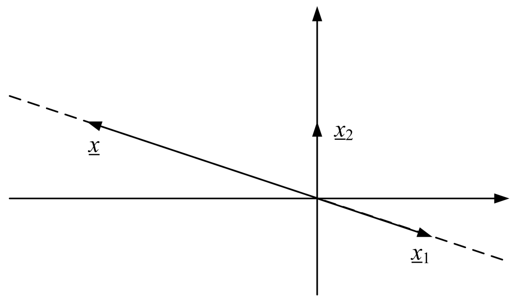
Fastholder vi en bestemt samling af vektorer $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$, kan vi undersøge mængden af samtlige linearkombinationer (3.1) af disse vektorer, når koefficienterne varierer frit i R, altså

$$\{\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{x}_k \mid \alpha_1 \in R,\ \alpha_2 \in R, \ldots, \alpha_k \in R\}$$

Denne mængde betegnes $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k\}$ og kaldes det af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$ **udspændte underrum** af R^n. Vi siger også at $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k$ **udspænder** $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k\}$. Nogle gange bruges **frembringe** i stedet for udspænde. Vi skal senere vende tilbage til indholdet og betydningen af begrebet underrum. Foreløbig er det blot et navn.

Nu er det vist tid til et par eksempler.

Eksempel 2



Figur 3.6 Linien gennem $(0,0)$.

I R^2 betragter vi vektoren $\underline{x}_1 = (3,-1)$. Det af $\underline{x}_1$ udspændte underrum $span\{\underline{x}_1\}$ består af alle vektorer af formen $\alpha\underline{x}_1$, hvor $\alpha \in R$. Underrummet udgøres altså af alle talpar på linien $\{(3\alpha, -\alpha) \mid \alpha \in R\}$ gennem $\underline{0}$ (se figur 3.6).

Tilføjer vi fx vektoren $\underline{x}_2 = (0,2)$, består det af $\underline{x}_1, \underline{x}_2$ udspændte underrum, $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}$ af alle vektorer af formen $\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2$, for vilkårlige koefficienter α_1 og α_2. Tydeligvis udgør dette underrum hele R^2, dvs $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\} = R^2$. Vi kan nemlig godtgøre at ethvert givet $\underline{y} = (y_1, y_2)$ kan fremstilles som linearkombination af $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ med koefficienterne $\frac{y_1}{3}$ og $\frac{y_2}{2} + \frac{y_1}{6}$. Dette kan bekræftes således:

$$(y_1, y_2) = \alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 = \alpha_1(3,-1) + \alpha_2(0,2) = (3\alpha_1, -\alpha_1 + 2\alpha_2).$$

Vi finder så α_1 og α_2 af ligningssystemet: $\quad 3\alpha_1 = y_1 \;,\; -\alpha_1 + 2\alpha_2 = y_2,$

dvs $\quad \alpha_1 = \frac{y_1}{3} \quad$ og $\quad \alpha_2 = \frac{1}{2}(y_2 + \alpha_1) = \frac{y_2}{2} + \frac{y_1}{6}$. Med disse værdier indsat er:

$$(y_1, y_2) = \frac{y_1}{3}(3,-1) + (\frac{y_2}{2} + \frac{y_1}{6})(0,2) = (\frac{y_1}{3})\underline{x}_1 + (\frac{y_2}{2} + \frac{y_1}{6})\underline{x}_2.$$

Det er imidlertid ikke sådan at hvilke som helst to vektorer i R^2 udspænder hele planen. Fx vil vi ved at tilføje $\underline{x} = (-6,2)$ til vektoren $\underline{x}_1$ ikke opnå at udvide det udspændte underrum - jfr figur 3.6 - eftersom

$$\alpha_1(3,-1) + \alpha_2(-6,2) = (3\alpha_1 - 6\alpha_2, -\alpha_1 + 2\alpha_2) = (\alpha_1 - 2\alpha_2)(3,-1)$$

stadig blot gennemløber den samme rette linie gennem $\underline{0}$ som før. Der gælder altså her at

$$span\{\underline{x}_1, \underline{x}\} = span\{\underline{x}_1\}.$$

Skulle vi sluttelig få den idé at tilføje flere vektorer i planen, fx $\underline{x}_3, \dots, \underline{x}_k$ til de betragtede $\underline{x}_1, \underline{x}_2$, vil dette naturligvis ikke øge $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\}$, der jo allerede er hele R^2. Vi har altså

$$span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \dots, \underline{x}_k\}.$$

Det er således ikke alene antallet af vektorer der afgør hvor stor en delmængde af talrummet disse vektorer udspænder. *

Eksempel 3

Hvis vi i R^3 sætter vektoren $\underline{x}_1 = (3, 1, 2)$, vil $\underline{x}_1$ udspænde en ret linie i rummet gennem $\underline{0}$:

$$span\{\underline{x}_1\} = \{\alpha(3, 1, 2) \mid \alpha \in R\} = \{(3\alpha, \alpha, 2\alpha) \mid \alpha \in R\}.$$

Inddrager vi vektoren $\underline{x}_2 = (-1, -1, 4)$, vil $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ til sammen udspænde

$$span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2\} = \{\alpha(3, 1, 2) + \beta(-1, -1, 4) \mid \alpha \in R,\ \beta \in R\},$$

der udgør en plan i R^3 gennem $\underline{0}$. (Igen kunne et andet valg af $\underline{x}_2$, fx $(-\frac{3}{10}, -\frac{1}{10}, -\frac{2}{10})$, have bevirket at det af $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ udspændte underrum var det samme det $\underline{x}_1$ selv kunne klare at udspænde.)

Hvad nu hvis der optræder en tredie vektor, $\underline{x}_3$? Der er to muligheder. Enten udspænder $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ og $\underline{x}_3$ den samme plan som før, eller de udspænder hele R^3. Det første er tilfældet, hvis $\underline{x}_3$ er en linearkombination af $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ - fx: $\underline{x}_3 = (1, -1, 10)$. Så vil jo enhver linearkombination af $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ og $\underline{x}_3$ kunne fremstilles som linearkombination af $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ alene.

Den anden mulighed indtræffer fx med $\underline{x}_3 = (0, 2, 1)$. Enhver vektor $\underline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ i R^3 kan nemlig fremstilles som linearkombination af $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ og $\underline{x}_3$

$$(y_1, y_2, y_3) = \alpha(3, 1, 2) + \beta(-1, -1, 4) + \gamma(0, 2, 1) = (3\alpha - \beta, \alpha - \beta + 2\gamma, 2\alpha + 4\beta + \gamma)$$

for passende valg af koefficienterne α, β og γ. At bestemme sådanne koefficienter kommer jo ud på at løse ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3\alpha - \ \ \beta \qquad\ &= y_1 \\ \alpha - \ \ \beta + 2\gamma &= y_2 \\ 2\alpha + 4\beta + \ \ \gamma &= y_3 \end{aligned}$$

i α, β og γ. Ved anvendelse af de metoder vi indfører i det senere kapitel om lineære ligningssystemer, finder vi at dette system - med forbehold for regnefejl - har løsningerne:

$$(\alpha, \beta, \gamma) = \frac{1}{30}(9y_1 - y_2 + 2y_3, -3y_1 - 3y_2 + 6y_3, -6y_1 + 14y_2 + 2y_3).$$

Med dette valg af koefficienter kan $\underline{y}$ altså fremstilles som linearkombination af $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ og $\underline{x}_3$. Tilføjer vi til disse tre vektorer en hvilken som helst endelig samling af vektorer, $\underline{x}_4, \ldots, \underline{x}_k$ udspændes stadig ikke mere end R^3. Hver enkelt af de nye vektorer er selv en linearkombination af $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ og $\underline{x}_3$, så en linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ vil kunne fremstilles som en linearkombination af $\underline{x}_1$, $\underline{x}_2$ og $\underline{x}_3$ alene. *

Med inspiration fra disse eksempler vil vi notere et par observationer - faktisk små sætninger - gyldige i ethvert talrum R^n.

S1: $\underline{0}$ vil altid være med i span$\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$. Da $\underline{0}$ fremkommer ved at benytte koefficienterne $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$.

S2: Hvis der til $\mathbf{U} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ *tilføjes vektorer - lad os kalde den* $\underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_p$ *- der allerede ligger i* $\mathbf{U}$*, dvs selv er en linearkombination af* $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$*, da øges span*$\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ *ikke*, dvs

$$span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k, \underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_p\} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}.$$

Et formelt argument der bekræfter udsagnet er: Når $\underline{y}$-erne er linearkombination af $\underline{x}$-erne findes passende koefficienter - betegnet $a_{ij}, i = 1, 2, \ldots, p,\ j = 1, 2, \ldots, k$ - således at

$$\begin{aligned}
\underline{y}_1 &= a_{11}\underline{x}_1 + a_{12}\underline{x}_2 + \ldots + a_{1k}\underline{x}_k \\
\underline{y}_2 &= a_{21}\underline{x}_1 + a_{22}\underline{x}_2 + \ldots + a_{2k}\underline{x}_k \\
&\vdots \\
\underline{y}_p &= a_{p1}\underline{x}_1 + a_{p2}\underline{x}_2 + \ldots + a_{pk}\underline{x}_k
\end{aligned}$$

En vilkårlig linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k, \underline{y}_1, \underline{y}_2, \ldots, \underline{y}_p$ har skikkelsen

$$\begin{aligned}
&\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{x}_k + \beta_1\underline{y}_1 + \ldots + \beta_p\underline{y}_p \\
&= \alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{x}_k \\
&+ \beta_1(a_{11}\underline{x}_1 + a_{12}\underline{x}_2 + \ldots + a_{1k}\underline{x}_k) \\
&+ \beta_2(a_{21}\underline{x}_1 + a_{22}\underline{x}_2 + \ldots + a_{2k}\underline{x}_k) \\
&\vdots \\
&+ \beta_p(a_{p1}\underline{x}_1 + a_{p2}\underline{x}_2 + \ldots + a_{pk}\underline{x}_k) \\
&= \text{linearkombination af } \underline{x}\text{-erne - skriv selv koefficienterne op, jeg gider ikke.}
\end{aligned}$$

S3: Tilføjes $\underline{0}$ til $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ *ændres span*$\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ *ikke*. Dette er et specialtilfælde af *S2*, da $\underline{0}$ er en linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ med alle koefficienterne lig 0.

S4: Hvis $\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_p\}$ er en delmængde af $\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_q\}$, er *span*$\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_p\}$ en delmængde af *span*$\{\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_q\}$. Enhver linearkombination af $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_p$ er nemlig også en linearkombination af $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_q$, idet vi foran de vektorer som ikke er med i

$\{\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_p\}$ blot anbringer koefficienten 0. Så bliver resultatet en linearkombination af $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_q$.

S5: For enhver endelig mængde af vektorer $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$, vil underrummet $\mathbf{U} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ *være lukket over for addition* og *skalarmultiplikation.* Det betyder dels at hvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$ begge ligger i $\mathbf{U}$, vil også $\underline{x} + \underline{y}$ ligge i $\mathbf{U}$, og dels at $\alpha\underline{x}$ også ligger i $\mathbf{U}$, når $\underline{x}$ gør. Argumentet er selvsagt, at hvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$ begge er linearkombinationer af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ gælder det samme for $\underline{x}+\underline{y}$ og $\alpha\underline{x}$. Desuden må $\mathbf{U}$ for *egen regning opfylde* kravene (1) - (8). Det er jo ingen overraskelse at kravene (1), (2), og (5) - (8) er opfyldt, da de gælder for alle vektorer i R^n, og derfor selvfølgelig også for de der befinder sig i $\mathbf{U}$. Vi mangler at vise at (3) og (4) også gælder i $\mathbf{U}$. (3) følger af *S3*, da $\underline{0} \in span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$. (4) følger af definitionen $\alpha\underline{x} \in \mathbf{U}$ for alle α, vi vælger nu blot $\alpha = -1$, så vil $-\underline{x} \in \mathbf{U}$.

S6: R^n er selv et underrum i R^n!! Det er nemlig altid muligt at angive et endeligt antal vektorer, der frembringer hele R^n. **OBS!** *Dette er meget vigtigt.* Sætter vi nemlig

$$\begin{aligned}
\underline{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0)\\
\underline{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0)\\
\underline{e}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0)\\
&\vdots\\
\underline{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

gælder åbenbart for et vilkårligt $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, at

$$\begin{aligned}
\underline{x} &= (x_1, x_2, \ldots, x_n)\\
&= (x_1, 0, \ldots, 0) + (0, x_2, \ldots, 0) + \ldots + (0, 0, \ldots, x_n)\\
&= x_1(1, 0, \ldots, 0) + x_2(0, 1, \ldots, 0) + \ldots + x_n(0, 0, \ldots, 1)\\
&= x_1\underline{e}_1 + x_2\underline{e}_2 + \ldots + x_n\underline{e}_n.
\end{aligned}$$

Dette viser, at $\underline{x}$ er en linearkombination af $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$. Enhver vektor i R^n er altså en linearkombination af disse vektorer, som kaldes (de sædvanlige) *grundvektorer.* Vi kan skrive

$$R^n = span\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n\}.$$

Disse grundvektorer er ikke de eneste der kan fremstille alle vektorer i R^n. Der er uendeligt mange andre valg.

S7: I ethvert R^n vil mængden $\{\underline{0}\}$ bestående alene af nulvektoren i R^n være et underrum, da jo $\{\underline{0}\} = span\{\underline{0}\}$. Eftersom vi i *S3* så at ethvert underrum vil indeholde $\underline{0}$, er $\{\underline{0}\}$ det *mindste underrum* i R^n, sådan at forstå at det er en delmængde af ethvert andet.

Vi har hidtil kun beskæftiget os med underrum udspændt af endelig mange vektorer. Der er imidlertid ingen problemer med også at tale om underrum udspændt af en vilkårlig mængde af vektorer - endelig eller uendelig. Hvis nemlig **M** er en vilkårlig delmængde af R^n, kan man danne samtlige linearkombinationer af vilkårlige sæt bestående af *endeligt* mange vektorer fra **M**. Denne samling af linearkombinationer betegnes **span(M)**. Vi har altså defineret

$$span(\mathbf{M}) = \{\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_j\underline{x}_j \mid j \in \mathbf{N};\ \underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j \in \mathbf{M};\ \alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j \in R\}.$$

Læg mærke til at j ikke - som før k - er et fast tal. Hvis **M** er en endelig mængde bestående af k vektorer er vi tilbage i det tidligere behandlede tilfælde. Så kan j antage alle værdier i mængden $\{1, 2, \ldots, k\}$, men vi kan få samtlige linearkombinationer frem ved kun at betragte $j = k$, da linearkombinationer svarende til mindre værdier af j fås ved at sætte nogle af koefficienterne til at være 0. Hvis derimod **M** er en uendelig mængde, er der ingen øvre grænse for hvor store sæt af endeligt mange vektorer vi kan plukke ud af **M**. Derfor kan j antage alle værdi i **N**. Det er imidlertid vigtigt at være klar over at vi kun tillader linearkombinationer af *endeligt mange* vektorer. Linear algebra er ikke en sportsgren der dyrker uendelige summer.

3.5 Lineær ufhængighed

I eksemplerne i foregående afsnit så vi at ét og samme underrum i R^n kan udspændes af mange forskellige sæt vektorer. Bortset fra det særlige tilfælde, hvor underrummet kun består af nulvektoren - $\underline{0}$ - er der ikke en øvre grænse for hvor mange vektorer der kan udspænde et givet underrum. Vi kan jo blot til det sæt der udspænder - $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ - tilføje vilkårlige vektorer, der er linearkombination af disse $\underline{x}$-er. Derimod må der altid være et mindste antal vektorer der kan udspænde et givet underrum. Der kan fx ikke være færre end én vektor i et udspændende sæt. Det er derfor nærliggende nærmere at undersøge mulighederne for at bestemme et mindste sæt udspændende vektorer for et givet underrum.

Vi vil nu påbegynde denne undersøgelse. Til den ende er begrebet **lineær uafhængighed** centralt.

Et sæt af endeligt mange vektorer - $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ - i R^n siges at være **lineært uafhængigt**, hvis nulvektoren $\underline{0}$ kun kan fremstilles som en linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ ved at alle koefficienter er 0. Eller lidt mere formelt:

$\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ er per definition **lineært uafhængige** hvis og kun hvis det gælder at man af

$$\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{x}_k = 0 \quad \text{kan slutte at} \quad \alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_k = 0.$$

Eftersom det altid er muligt at fremstille $\underline{0}$ som linearkombination af et hvilket som helst sæt af endeligt mange vektorer ved at lade alle koefficienter være 0, er det nærliggende at kalde en sådan linearkombination **triviel** - dette ord bruges ofte i matematisk jargon som karakterisering af det bundløst banale. Derefter er det forståeligt, hvorfor man ofte kalder en linearkombination der fremstiller $\underline{0}$ *uden* at alle koefficienterne er 0, for **ikke-triviel**. Vi bruger også vendingen 'en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$'. På denne måde kan man omformulere definitionen af lineær uafhængighed:

Et sæt af endeligt mange vektorer er lineært uafhængige, netop hvis det er umuligt at give en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$ ved hjælp af disse vektorer.

Eksempel 4

I R^2 betragter vi vektorerne $\underline{x}_1 = (3, -1)$, $\underline{x}_2 = (0, 2)$ og $\underline{x}_3 = (-6, 2)$ som vi også behandlede i eksempel 2. Her er sættet bestående af $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ lineært uafhængigt, da man af

$$\alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{x}_2 = \underline{0},$$

altså af $\quad \alpha_1(3, -1) + \alpha_2(0, 2) = (0, 0), \quad$ får at α_1 og α_2 må opfylde ligningssystemet

$$\begin{aligned} 3\alpha_1 &= 0 \\ -\alpha_1 + 2\alpha_2 &= 0. \end{aligned}$$

har dette ligningssystem åbenbart ikke andre løsninger end

$$\alpha_1 = \alpha_2 = 0,$$

men så er $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ jo lineært uafhængige. Læg i øvrigt mærke til at vi i eksempel 2 fandt at disse to vektorer udspænder hele R^2.
Derimod er $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_3$ ikke lineært uafhængige. Da $\underline{x}_3$ er proportional med $\underline{x}_1$, idet $\underline{x}_3 = -2\underline{x}_1$, kan disse vektorer ikke være lineært uafhængige. For da

$$\underline{x}_1 + \frac{1}{2}\underline{x}_3 = \underline{x}_1 + \frac{1}{2}(-2\underline{x}_1) = 0,$$

har vi en fremstilling af $\underline{0}$ som linearkombination af $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_3$ med andre koefficienter end lutter 0-er. I eksempel 2 så vi, at $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_3$ ikke udspænder hele R^2.

Når $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_3$ ikke er lineært uafhængige, er hele sættet $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3$ 'endnu mindre' lineært uafhængigt. Det er jo let at fremstille $\underline{0}$ som liearkombination af disse tre vektorer uden at **alle** koefficienter er 0, da

$$\underline{x}_1 + 0\underline{x}_2 + \frac{1}{2}\underline{x}_3 = \underline{0}.$$

Vi har jo blot proppet $0\underline{x}_2$ ind i den forrige linearkombination af $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_3$, der allerede selv kunne klare at levere en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$. *

Hvis et sæt af endeligt mange vektorer i R^n ikke er lineært uafhængigt, siges det at være **lineært afhængigt**. Med et lineært afhængigt sæt *findes* altså en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$.

En række enkle, men vigtige observationer/sætninger byder sig umiddelbart til:

S8: Enhver enkelt vektor $\underline{x}$ som ikke er $\underline{0}$ udgør et lineært uafhængigt sæt. Såfremt $\alpha\underline{x} = 0$ var en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$, altså med α forskellig fra 0, ville jo $\underline{x} = ({}^1/_\alpha)\alpha\underline{x} = ({}^1/_\alpha)0 = 0$. Dette er i strid med forudsætningen om at $\underline{x}$ ikke er $\underline{0}$.

S9: Intet sæt af vektorer i R^n der indeholder $\underline{0}$ kan være lineært uafhængigt. Med andre ord, ethvert sådant sæt er lineært afhængigt. En linearkombination med en (vilkårlig) koefficient forskellig fra 0 foran $\underline{0}$, og koefficienten 0 foran resten af vektorerne i sættet, givet jo en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$ - ikke alle koefficienter er 0.

En direkte konsekvens af *S9* vil være, at en tilføjelse af $\underline{0}$ til et lineært uafhængigt sæt af vektorer vil gøre det udvidede sæt lineært afhængigt.

S10: Hvis vi har at gøre med et lineært uafhængigt sæt af vektorer i R^n, er ethvert delsæt også lineært uafhængigt. Såfremt der fandtes en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$ ved hjælp af delsættet, kunne man også skaffe en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$ ud fra det oprindelige sæt ved simpelthen at anbringe koefficienten 0 foran de vektorer, der ikke indgår i delsættet. Men da det oprindelige sæt var lineært uafhængigt er det umuligt at skaffe en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$ med dette sæt.

En direkte konsekvens af *S10* bliver, at *hvis vi til et lineært afhængigt sæt af vektorer føjer et hvilket som helst antal vektorer, er det resulterende sæt også lineært afhængigt.* Var det resulterende sæt nemlig lineært uafhængigt, måtte - efter det ovenstående - det samme gælde for ethvert delsæt, herunder det oprindelige, som imidlertid var forudsat lineært afhængigt.

S11: Hvis der i et sæt af vektorer i R^n er én (eller flere) af vektorerne der er en linearkombination af nogle af de øvrige, må sættet være lineært afhængigt. Lad os fx antage at $\underline{x}$ og $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ indgår i sættet sådan at

$$\underline{x} = \alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{x}_k$$

for passende koefficienter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Så er

$$1\underline{x} - \alpha_1\underline{x}_1 - \alpha_2\underline{x}_2 - \ldots - \alpha_k\underline{x}_k = 0$$

en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$, da koefficienten til $\underline{x}$ er forskellig fra 0 - koefficienten er 1. Det bevirker at $\underline{x}$ og $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ tilsammen udgør et lineært afhængigt sæt. Efter det foregående er det sæt de er plukket ud af så også lineært afhængigt.

Et specialtilfælde af denne situation har vi, hvis et sæt indeholder flere identiske vektorer. Et sådant sæt er altså nødvendigvis lineært afhængigt.

Det næste resultat er så vigtigt at det ophøjes til en sætning med et pænt bevis.

Sætning 3.1
Et sæt af endelig mange vektorer i R^n er lineært afhængigt hvis og kun hvis (mindst) én af vektorerne er linearkombination af de øvrige.

Bevis
Der er to påstande at vise:

" $\Rightarrow$ ": Hvis $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ er et lineært afhængigt sæt af vektorer, er mindst én af dem en linearkombination af de øvrige. Dette indse således: Da sættet er lineært afhængigt, findes en ikke-triviel linearkombination af dem som fremstiller nulvektoren,

$$\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{x}_k = 0,$$

hvor mindst ét af α-erne ikke er 0. Lad os antage at det er α_j der ikke er 0. Så kan vi isolere $\alpha_j\underline{x}_j$ på den ene side af lighedstegnet, og derefter multiplicerer vi ligningen med $\frac{1}{\alpha_j}$. Hele denne operation er lovlig i kraft af egenskaberne (1) - (8). Dette giver en fremstilling af $\underline{x}_j$ som linearkombination af de øvrige. Formelt skrevet op bliver resultatet

$$\underline{x}_j = -(\frac{\alpha_1}{\alpha_j})\underline{x}_1 - \ldots - (\frac{\alpha_{j-1}}{\alpha_j})\underline{x}_{j-1} - (\frac{\alpha_{j+1}}{\alpha_j})\underline{x}_{j+1} - \ldots - (\frac{\alpha_k}{\alpha_j})\underline{x}_k,$$

hvor α_j eventuelt også kan være α_1 eller α_k. Hermed har vi vist *kun hvis*-delen af sætningen.

" $\Leftarrow$ ": Hvis én af vektorerne er linearkombination af de øvrige, er sættet lineært afhængigt. Denne påstand har vi godtgjort i *S11*. Dermed er også *hvis*-delen klaret. $\square$

4 Basis og dimension

4.1 Basisbegrebet

Vi skal nu nærme os en besvarelse af det spørgsmål som blev stillet i begyndelsen af det foregående kapitel, *hvor få vektorer kan vi nøjes med til at udspænde et givet underrum af R^n*? I besvarelsen er begrebet **basis** centralt.

Et endeligt sæt af vektorer $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$ i et underrum $\mathbf{U}$ af R^n kaldes en **basis** for $\mathbf{U}$, hvis følgende to *krav* er opfyldt:

(1) *Enhver vektor i* $\mathbf{U}$ *kan fremstilles som linearkombination af* $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$.
Eftersom enhver linearkombination af vektorer i $\mathbf{U}$ selv ligger i $\mathbf{U}$ - et underrum er jo lukket over for addition og multiplikation, jfr tidligere bemærkninger - kan dette udtrykkes:

$$\mathbf{U} = span\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k\}.$$

(2) *Sættet* $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$ *er lineært uafhængigt.*

Foreløbig ved vi ikke hvilke underrum der overhovedet besidder en basis.

Underrummet $\{\underline{0}\}$ *har ingen basis*, da $\underline{0}$, som er ene om at udfylde $\{\underline{0}\}$, ikke er et lineært uafhængigt sæt.

Men derudover kan vi konstatere at R^n, der jo er et underrum i sig selv, har en basis. Vi har nemlig tidligere indset at vektorerne $\underline{e}_1, \underline{e}_2, \ldots, \underline{e}_n$, bestemt ved

$$\begin{aligned}
\underline{e}_1 &= (1, 0, 0, \ldots, 0) \\
\underline{e}_2 &= (0, 1, 0, \ldots, 0) \\
\underline{e}_3 &= (0, 0, 1, \ldots, 0) \\
&\vdots \\
\underline{e}_n &= (0, 0, 0, \ldots, 1)
\end{aligned}$$

udspænder hele R^n. Der resterer derfor blot at vise at disse vektorer er lineært uafhængige. Men en linearkombination af $\underline{e}$-erne der fremstiller nulvektoren,

$$\alpha_1\underline{e}_1 + \alpha_2\underline{e}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{e}_n = \underline{0},$$

må opfylde $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n) = \underline{0} = (0, 0, \ldots, 0)$ - udfør selv ræsonnementet. Med andre ord må samtlige α-er være 0. Fremstillingen er derfor nødt til at være triviel, hvilket viser at $\underline{e}$-erne er lineært uafhængige, og de udgør således en basis for R^n.

Sætning 4.1
Ethvert underrum $\mathbf{U} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$, *som ikke udelukkende består af* $\underline{0}$, *har en basis.*

Bevis
Hvis sættet $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ er lineært uafhængigt er påstanden åbentbart sand, al den stund $\underline{x}$-erne per definition udspænder $\mathbf{U}$. Hvis sættet derimod er lineært afhængigt, er det muligt at $k-1$ af vektorerne er lineært uafhængige. Hvis dette heller ikke er tilfældet, er det muligt at $k-2$ af dem er det - og så fremdeles. På et tidspunkt må vi nå frem til det største antal $\underline{x}$-er der danner et lineært uafhængigt sæt. Om ikke andet består dette sæt af én vektor. Mindst én af vektorerne $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ er jo ikke $\underline{0}$, og en enkelt vektor forskellig fra $\underline{0}$ danner - jfr *S8* i forrige kapitel - et lineært uafhængigt sæt.

Konklusionen på disse overvejelser er, at der findes et største antal - lad os kalde det j - lineært lineært uafhængige vektorer blandt $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Det er meget muligt at der findes flere forskellige måder at vælge disse j lineært uafhængige vektorer på. Vi gør brug af én af måderne. Der er ikke noget i vejen for at antage at de første j $\underline{x}$-er, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$, udgør et maksimalt antal lineært uafhængige vektorer blandt $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Ellers kunne vi bare have omnummereret dem.

Nu vel, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$ udgør altså et maksimalt lineært uafhængigt sæt blandt $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Dette indebærer at uanset hvilken af de resterende vektorer der tilføjes til $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$, bliver det udvidede sæt lineært afhængigt - ellers var j jo ikke det størst mulige antal lineært uafhængige. Føjes fx $\underline{x}_{j+1}$ til $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$ er sættet $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j, \underline{x}_{j+1}$ lineært afhængigt. Der må derfor findes en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$ ved hjælp af disse vektorer, så

$$\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_j\underline{x}_j + \alpha_{j+1}\underline{x}_{j+1} = \underline{0}, \tag{4.1}$$

hvor mindst mindst ét af α-erne må være forskellige 0. Nu kan det *ikke* tænkes at $\alpha_{j+1} = 0$. For i så fald ville vi jo have

$$\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_j\underline{x}_j = \underline{0},$$

hvor mindst ét blandt $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_j$ må være forskelligt fra 0 - når nu α_{j+1} ikke er det. Men så ville der foreligge en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$ ved hjælp af lineært uafhængige vektorer $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$; altså i modstrid med definitionen på lineær uafhængighed. Når α_{j+1} således ikke kan være 0, kan $\underline{x}_{j+1}$ isoleres i (4.1) - dvs kan fremstilles som linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$.

Med helt parallelle argumenter kan vi indse, at også de resterende $\underline{x}_{j+2}, \ldots, \underline{x}_k$ kan fremstilles som linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$.

Nu er ræsonnementet næsten fuldført. Alle vektorerne i **U** er linearkombinationer af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Imidlertid er $\underline{x}_{j+1}, \underline{x}_{j+2}, \ldots, \underline{x}_k$ linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$, og derfor kan enhver linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ også skrives som linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$. Dette sæt af vektorer udspænder altså hele **U**. Da det samtidigt er lineært uafhængigt, opfylder det begge krav til en basis. Underrummet **U** besidder altså en basis. □

Eksempel 1

Gangen i beviset kan illustreres på følgende måde. I R^3 har - i kraft af sætningen - $\mathbf{U} = span\{(1,0,2), (-1,-1,5), (2,1,-3)\}$ en basis. Da $(2,1,-3) = (1,0,2) - (-1,-1,5)$ er de tre vektorer ikke lineært uafhængige. Det er derimod $(1,0,2)$ og $(-1,-1,5)$ - check selv! Da enhver linearkombination af de tre vektorer

$$\begin{aligned}
&\alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(-1,-1,5) + \alpha_3(2,1,-3) \\
&= \alpha_1(1,0,2) + \alpha_2(-1,-1,5) + \alpha_3((1,0,2) - (-1,-1,5)) \\
&= (\alpha_1 + \alpha_3)(1,0,2) + (\alpha_2 - \alpha_3)(-1,-1,5)
\end{aligned}$$

bliver en linearkombination af de to første, udgør disse en basis for **U**. *

4.2 Dimension

Den ovenfor fundne basis for **U** blev konstrueret ud fra det sæt $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ som udspændte **U**. Men der vil være uendeligt mange andre sæt som udspænder **U**. Måske kunne det tænkes, at der af dem kunne konstrueres baser for **U** med et andet antal elementer end j. Det viser sig, at dette ikke er muligt. Også dette resultat er så vigtigt, at det må mejsles ud i en sætning:

Sætning 4.2
Enhver basis for et underrum $\mathbf{U} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ *af* R^n *har det samme antal elementer. Da* R^n *selv er et underrum gælder påstanden også for* R^n*.*

Bevis
Lad os antage at både $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_j$ og $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_i$ er baser for **U**. Vi skal vise at $i = j$. Hvis dette ikke var tilfældet, er enten $j < i$ eller $i < j$.

Vi ser først hvad der sker, hvis $j < i$.

Enhver af vektorerne $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_i$ er en linearkombination af $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_j$, som jo udspænder **U**. Specielt:

$$\underline{c}_1 = \alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2 + \ldots + \alpha_j\underline{b}_j.$$

Her kan ikke alle α-erne være 0, da $\underline{c}_1$ så ville være $\underline{0}$, i strid med at $\underline{c}_1$ indgår i et lineært uafhængigt sæt. Vi kan fx antage at α_1 er forskellig fra 0. Så kan $\underline{b}_1$ udtrykkes som linearkombination af $\underline{c}_1$ og $\underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_j$. Det bevirker, at enhver linearkombination af $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_j$ - dvs enhver vektor i U - også kan fremstilles som en linearkombination af $\underline{c}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_j$. Dette gælder spcielt for $\underline{c}_2$.

Vektoren $\underline{c}_2$ er altså linearkombination af $\underline{c}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_j$. I denne linearkombination kan ikke alle $\underline{b}$-koefficienterne være 0, thi i så fald ville $\underline{c}_2$ være proportional med $\underline{c}_1$ - i strid med at de er lineært uafhængige. Vi kan gå ud fra at koefficienten til $\underline{b}_2$ ikke er 0, hvilket bevirker at $\underline{b}_2$ er en linearkombination af $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{b}_3, \ldots, \underline{b}_j$. Enhver linearkombination af $\underline{c}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_j$ - dvs enhver vektor i **U** - kan dermed fremstilles som en linearkombination af $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \underline{b}_3, \ldots, \underline{b}_j$. Dette sæt udspænder altså hele **U**.

På denne måde kan man blive ved med at udskifte en $\underline{b}$-vektor ad gangen med en $\underline{c}$-vektor, og stadig have at gøre med et sæt der udspænder hele **U**. Eftersom $i > j$ er der $\underline{c}$-er nok til at skifte alle $\underline{b}$-erne ud. Dermed er altså $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_j$ et sæt af vektorer der udspænder hele **U**. Specielt må sættet udspænde resten af $\underline{c}$-erne - hvoraf der er mindst ét - $\underline{c}_{j+1}, \ldots, \underline{c}_i$. Disse $\underline{c}$-er er altså linearkombination af $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_j$, men så fortæller sætning 1 i forrige kapitel, at hele sættet $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_i$ er lineært afhængigt - i strid med at det udgør en basis. Vi føres altså til at konkludere, at forudsætningen $i > j$ ikke kan opretholdes.

Muligheden $i < j$ kan imidlertid heller ikke opretholdes. For hele det forrige ræsonnement kan jo gentages med $\underline{b}$-erne og $\underline{c}$-erne i ombyttede roller. Tilbage er kun muligheden $i = j$, som dermed er bevist. $\square$

Det fælles antal vektorer i en basis for et givet underrum $\mathbf{U} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ af R^n er et karakteristisk tal for underrummet. Tallet kaldes underrumets **dimension** og betegnes gerne $\mathbf{dim}(\mathbf{U})$. For talrummet R^n fandt vi at de n grundvektorer udgør en basis. Vi har derfor

Sætning 4.3
R^n har dimensionen n.

Da underrummet $\mathbf{U} = \{\underline{0}\}$ ikke har nogen basis giver det god mening at tillægge det dimensionen 0, dvs $dim\{\underline{0}\} = 0$.

I de følgende bemærkninger er det hele tiden underforstået, at de underrum **U** der betragtes er af skikkelsen $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$.

B1: For ethvert tal $k = 1, 2, \ldots, n$ findes et underrum **U** *af R^n som har dimensionen k.* Vi kan nemlig blot vælge de k første af de n grundvektorer. De er lineært uafhængige, da de er et delsæt af et lineært uafhængigt sæt. De er derfor en basis for det underrum de udspænder. Underrummet har altså dimension k. De underrum der har dimensionen $n - 1$ kaldes **hyperplaner** i R^n. Dette begreb er åbenbart en slags generalisation af begrebet plan i R^3. Hyperplanerne i R^3 (af dimension $3 - 1 = 2$) er netop planerne gennem $\underline{0}$. Det er også i klar analogi med situationen i R^2 og R^3, at vi kalder de 1-dimensionale underrum i R^n for rette linier gennem $\underline{0}$. De har jo formen

$$\{\alpha\underline{a} \mid \alpha \in R\},$$

hvor $\underline{a}$ ikke er $\underline{0}$. Denne mængde kaldes **den rette linie gennem $\underline{0}$ med retningen $\underline{a}$**.

Det er også nærliggende at kalde en mængde af formen

$$\{\alpha\underline{a} + \underline{b} \mid \alpha \in R\},$$

hvor $\underline{a}$ stadig er forskellig fra $\underline{0}$, og hvor $\underline{b}$ er en vilkårlig vektor i R^n, for **den rette linie gennem $\underline{b}$ med retningen $\underline{a}$**. *Obs!* Denne mængde er *ikke* et underrum i R^n - hvorfor ikke?

B2: I ethvert underrum **U** *af dimension k vil et vilkårligt sæt af k lineært uafhængige vektorer fra* **U** *udgøre en basis.* Lad nemlig dette sæt hedde $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k$. Desuden findes en basis for **U**, $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$. Nu kan vi med nøjagtigt det samme ræsonnement som i beviset for sætning 4.2 udskifte alle $\underline{b}$-erne med $\underline{c}$-er og opnå, at det resulterende sæt, altså $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k$, frembringer **U**. Da det samtidigt er lineært uafhængigt, udgør det en basis for **U**.

Påstanden gælder specielt for $\mathbf{U} = R^n$.

B3: (Som en pendant til *B2* gælder) *I ethvert underrum* **U** *af dimension k vil et vilkårligt sæt af k vektorer som frembringer* **U** *udgøre en basis.* For at indse det lader vi igen sættet hedde $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k$. Påstanden er godtgjort hvis vi kan bevise at $\underline{c}$-erne er lineært uafhængige.

Var $\underline{c}$-erne i stedet lineært afhængige, måtte der findes et største lineært uafhængigt delsæt - da ikke alle $\underline{c}$-erne kan være $\underline{0}$. Dette delsæt måtte have færre end k elementer. Tilføjes et vilkårligt af de øvrige $\underline{c}$-er til det maksimalt lineært uafhængige delsæt, opstår et lineært afhængigt sæt. Derfor må den tilføjede vektor være en linearkombination af vektorerne i delsættet. Det medfører imidlertid at enhver vektor i **U** - der jo er en linearkombination af $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k$ - kunne fremstilles som linearkombination af det lineært uafhængige delsæt af $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_k$ - der har færre elementer end k. Men så ville delsættet være en basis for **U** med færre end k elementer, i strid med at **U** har dimention k.

B4: I et underrum **U** *af dimension k vil et vilkårligt sæt med $k+1$ eller flere vektorer være lineært afhængigt.* I følge *B2* ville jo i modsat fald k af dem udgøre en basis for **U**. Derfor ville disse k frembringe hele **U**, specielt de resterende vektorer i sættet, i strid med antagelsen om at sættet var lineært uafhængigt. *Dimensionen af underrummet angiver altså det største antal lineært uafhængige vektorer i* **U**.

B4': Specielt vil et vilkårligt sæt af $n+1$ eller flere vektorer i R^n være lineært afhængigt.

4.3 Mere om underrum

(a) De forrige betragtninger er gennemført for underrum af formen $\mathbf{U} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$. Hvad nu hvis $\mathbf{M}$ er en vilkårlig delmængde af R^n og $\mathbf{U} = span(\mathbf{M})$? *Det gør ingen forskel!!* Ethvert sådant underrum er nemlig nødvendigvis af formen $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ for passende valg af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Det kan vi overbevise os om på følgende måde:

Der findes i $\mathbf{M}$ et største antal lineært uafhængige vektorer, jfr *B4*. Dette antal kunne være k, og $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ et dertil svarende lineært uafhængigt sæt fra $\mathbf{M}$. Det kunne godt være at $k = n$, men det spiller i øvrigt ingen rolle. Tilføjer vi til $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ en hvilken som helst vektor $\underline{x}$ fra $\mathbf{M}$ som ikke ligger i sættet selv, bliver det udvidede sæt lineært afhængigt, og med det sædvanlige argument ses, at $\underline{x}$ er en linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Heraf følger at enhver vektor i $\mathbf{M}$ er en linearkombination af dette sæt.

Da $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ er en delmængde af $\mathbf{M}$, er også $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ en delmængde af $\mathbf{U} = span(\mathbf{M})$. Men omvendt må det også gælde at enhver vektor i $\mathbf{U}$ faktisk ligger i $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$. Da enhver vektor $\underline{y}$ i $\mathbf{U}$ er en linearkombination af vektorer fra $\mathbf{M}$, og hver af disse er en linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Derved bliver $\underline{y}$ alt i alt en linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$, og altså et element i $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$, hvilket var påstanden. Summa summarum er $\mathbf{U}$ og $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ delmængder af hinanden, men så er de identiske:

$$\mathbf{U} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}.$$

(b) Vi kan nu give en meget nyttig karakterisering af underrummene $\mathbf{U} = span(\mathbf{M})$ i R^n. Det er uden videre klart, at hvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er to vektorer fra $\mathbf{U}$ vil også (1) $\underline{x} + \underline{y}$ og (2) $\alpha\underline{x}$ ligge i $\mathbf{U}$, hvor α er en vilkårlig skalar. Det skyldes simpelhen at både $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er linearkombinationer af vektorer fra $\mathbf{M}$, hvorved også $\underline{x}+\underline{y}$ og $\alpha\underline{x}$ er linearkombinationer af vektorer fra $\mathbf{M}$, hvilket netop er kriteriet for at de befinder sig i $\mathbf{U}$.

Hvis nu $\mathbf{V}$ er en delmængde i R^n, om hvilke vi kun ved at den opfylder (1) og (2), må $\mathbf{V}$ være et underrum. Nærmere bestemt er $\mathbf{V} = span(\mathbf{V})$. Thi på den ene side er det klart, at enhver vektor $\underline{x}$ i $\mathbf{V}$ er en linearkombination af vektorer i $\mathbf{V}$, nemlig $\underline{x} = 1\underline{x}$!! Altså er $\mathbf{V}$ en delmængde af $span(\mathbf{V})$. Omvendt vil enhver linearkombination af vektorer fra $\mathbf{V}$ selv tilhøre $\mathbf{V}$ i kraft af - gentagen anvendelse af - (1) og (2). (I må selv checke detaljerne.) Det bevirker at $span(\mathbf{V})$ er en delmængde af $\mathbf{V}$. Men så er de to mængder jo ens. De fundne resultater fortjener at blive samlet i en sætning, som vi altså har bevist.

Sætning 4.4

(a) *Ethvert underrum i R^n, $\mathbf{U} = span(\mathbf{M})$, hvor $\mathbf{M}$ er en vilkårlig delmængde af R^n, er af formen $\mathbf{U} = span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k\}$ for et passende sæt $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ fra $\mathbf{M}$.*

(b) *En delmængde $\mathbf{V}$ af R^n er et underrum i R^n, hvis og kun hvis $\mathbf{V}$ opfylder*

(1) Hvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$ tilhører $\mathbf{V}$, vil også $\underline{x} + \underline{y}$ tilhøre $\mathbf{V}$

(2) Hvis $\underline{x}$ tilhører $\mathbf{V}$ og α er en skalar, vil $\alpha\underline{x}$ også tilhøre $\mathbf{V}$.

4.4 Koordinatfremstilling

Hvis **U** er et k-dimensionalt underrum i R^n, og $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$ er en basis for **U**, har enhver vektor $\underline{x}$ en fremstilling som linearkombination af $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$:

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \ldots + \alpha_k \underline{b}_k,$$

med passende koefficienter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_k$. Principielt kunne det tænkes at $\underline{x}$ havde en anden fremstilling som linearkombination af $\underline{b}$-erne med nogle andre koefficienter $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_k$:

$$\underline{x} = \beta_1 \underline{b}_1 + \beta_2 \underline{b}_2 + \ldots + \beta_k \underline{b}_k.$$

Dette er imidlertid ikke muligt, dvs α-sættet og β-sættet må være identiske. Da vi ved at trække den sidste fremstilling fra den første får en fremstilling af $\underline{0}$ som linearkombination af $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_k$:

$$\underline{0} = (\alpha_1 - \beta_1)\underline{b}_1 + (\alpha_2 - \beta_2)\underline{b}_2 + \ldots + (\alpha_k - \beta_k)\underline{b}_k.$$

Da $\underline{b}$-erne udgør en basis, er de lineært uafhængige, hvorved de kun tillader en triviel fremstilling af $\underline{0}$. Samtlige koefficienter i denne fremstilling må altså være 0. Med andre ord er $\alpha_i = \beta_i$ for alle $i = 1, 2, \ldots, k$.

Der findes altså én og kun én fremstilling af $\underline{x}$ som linearkombination af vektorerne i en given basis. Disse entydigt bestemte koefficienter i denne fremstilling kaldes $\underline{x}$'s **koordinater** i forhold til den givne basis. I forhold til en anden basis er $\underline{x}$'s koordinater selvsagt nogle andre, jfr eksempel 2 nedenfor.

Eksempel 2

I eksempel 3 på side 38 betragtede vi vektorerne $\underline{x}_1 = (3, 1, 2)$, $\underline{x}_2 = (-1, -1, 4)$ og $\underline{x}_3 = (0, 2, 1)$ i R^3, og vi indså at enhver vektor i R^3 kan fremstilles som linearkombination af disse tre. Da R^3 har dimension 3, udgør disse tre vektorer en basis for R^3.

I eksemplet fandt vi endvidere, at vektoren $\underline{y}$ kan skrives som

$$\underline{y} = \alpha(3, 1, 2) + \beta(-1, -1, 4) + \gamma(0, 2, 1),$$

med $\alpha = \frac{1}{30}(9y_1 - y_2 + 2y_3)$, $\beta = \frac{1}{30}(-3y_1 - 3y_2 + 6y_3)$, $\gamma = \frac{1}{30}(-6y_1 + 14y_2 + 2y_3)$.

Sættet (α, β, γ) er således $\underline{y}$'s koordinater i forhold til basen $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3\}$. Tilsvarende har vektoren $\underline{e}_1 = (1, 0, 0)$ i forhold til *denne basis* koordinaterne $(\frac{9}{30}, -\frac{3}{30}, -\frac{6}{30})$ - dette fås ved at indsætte $y_1 = 1, y_2 = 0$ og $y_3 = 0$. For $\underline{e}_2$ og $\underline{e}_3$ er koordinaterne tilsvarende $(-\frac{1}{30}, -\frac{3}{30}, \frac{14}{30})$ henholdsvis $(\frac{2}{30}, \frac{6}{30}, \frac{2}{30})$.

Vektoren $\underline{y}$'s koordinater i grundbasen $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ er (y_1, y_2, y_3), som jo er forskellig fra $\underline{y}$'s koordinater i basen $\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \underline{x}_3\}$ *

Det er altså vigtigt at være opmærksom på forskellen mellem en vektor - som selv er et talsæt - og dens koordinater i en given basis, som *også* er et talsæt, men ikke det samme, med mindre basen er grundbasen.

Eksempel 3

I R^7 betragtes underrummet **U** udspændt af vektorerne $\underline{x}_1 = (0, 2, 1, 0, -3, 1, 4)$, $\underline{x}_2 = (-1, 1, -2, 0, 0, 3, 0)$ og $\underline{x}_3 = (-3, -5, -10, 0, 12, 5, -16)$. Her er $\underline{x}_3 = -4\underline{x}_1 + 3\underline{x}_2$, mens $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ øjensynlig er lineært uafhængige. Derfor er **U** et 2-dimensionalt underrum i R^7 med $\underline{x}_1$ og $\underline{x}_2$ som basis. Vektoren $\underline{x}_3$'s koordinater i denne basis er $(-4, 3)$.

5 Lineære afbildninger mellem talrum

5.1 Indledning

I ved godt hvor væsentlige de reelle funtioner af reelle variable er, både i anvendelsessammenhænge og inden døre i matematikken selv. De funktioner man beskæftiger sig med i den gymnasiale matematikundervisning afhænger praktisk taget alle af én variabel med reelle tal som funktionsværdier. I har også - men måske ikke i matematikundervisningen - mødt eksempler på reelle funktioner af to variable - det kunne fx være et geografisk steds højde over havoverfladen som funtion af stedets koordinster; eller spændingsforskellen U som funktion af modstanden R og og strømstyrken I i elektriske kredse ($Ohms\ lov : U = RI$); eller en indespærret luftarts tryk P som funtion af dens temperatur T og rumfang V ($P = \frac{nRT}{V}$); eller den samfundsmæssige produktion Y som funktion af den samlede arbejdsstyrke L og det samlede kapitalapparat I ($Y = cL^{\alpha}I^{1-\alpha}$) etc.

Der er imidlertid ingen grund til at begrænse sig til sådanne funktioner af én eller to variable. Både fra et anvendelsessynspunkt og fra et matematisk synspunkt er der særdeles god mening i at betragte funktioner hvis variable hentes i ét talrum R^n, og hvis værdier befinder sig i et andet talrum R^p, hvor såvel n som p kan være vilkårlige naturlige tal.

Vi kunne fx forestille os, at vi i ethvert punkt på jordoverfladen - fastlagt ved $(x_1, x_2) =$ (længdegrad, breddegrad) - ønskede at repræsentere et sæt meteorologiske data, fx stedets lufttryk, lufttemperatur, luftfugtighed, vindhastighed og regnmålerstand, ved en vektor $(y_1, y_2, y_3, y_4, y_5)$ i R^5. Hvis vi for ethvert punkt på jorden havde en sådan repræsentation ville vi i realiteten stå med en **afbildning** F - en generaliseret funktion, man bruger ordet afbildning, hvis værdierne ikke ligger i R - der til ethvert punkt i et område $\mathbf{A}$ af R^2 har knyttet et punkt i R^5:

$$F : \mathbf{A} \to R^5,$$

hvor altså $\mathbf{A}$ er en delmængde af R^2. Vi vil jo ikke bruge hele R^2, fordi kun punkter svarende til sædvanlige længde- og breddegrader skal være med. Det betyder at længdegraden kan antage værdier mellem $-\pi$ og π (svarende til 180° vestlig og 180° østlig længde), mens breddegraden kan antage værdier mellem $-\frac{\pi}{2}$ (sydpolen) og $\frac{\pi}{2}$ (nordpolen). Som $\mathbf{A}$ vælger vi derfor $\mathbf{A} = \{(x_1, x_2) \mid x_1 \in [-\pi, \pi[\ ,\ x_2 \in [-\frac{pi}{2}, \frac{pi}{2}]\}$.

I denne fremstilling forestiller vi os de meteorologiske data indsamlet på ét og kun ét tidspunkt - tiden indgår jo ikke i modellen. Der er imidlertid intet i vejen for at tænke sig de samme slags data på et bestemt sted givet til forskellige tidspunkter. Det kunne foregå ved at vi ikke blot så på datasættet som funktion af stedets koordinater, men også af tidspunktet. Den uafhængige variabel skulle altså ikke være en vektor $(x_1, x_2) \in R^2$, men en vektor $(x_1, x_2, x_3) \in R^3$, hvor den nye komponent x_3 repræsenterer tiden. Så ville vi have at gøre med en ny afbildning

$$G : \mathbf{B} \rightarrow R^5,$$

hvor $\mathbf{B}$ er en delmængde af R^3 - nærmere bestemt $\mathbf{B} = \mathbf{A} \times R$.

Der kan vel være grund til at gøre opmærksom på, at ingen af de to ovennævnte 'meteorologiske modeller' befatter sig med *indsamlingen* af data. Det er naturligvis ikke muligt at indsamle data i ethvert punkt i et uendeligt område af et talrum. Modellerne skal derfor anskues som *principmodeller:* I princippet eksistererde anførte data for hvert punkt på jorden.

Dette var blot et enkelt eksempel blandt uendelig mange til at illustrere fornuften i at se på generelle afbildninger mellem højere-dimensionale talrum.

Ligesom der findes uendeligt mange typer af 'gymnasiefunktioner' - reelle funktioner af én reel variabel - findes der naturligvis uendeligt mange slags afbildninger mellem talrum. Vi skal i denne forbindelse kun betragte én slags - men hvilken slags! - de **lineære afbildninger**. Skønt de lineære afbildninger kun udgør en lille - om end uendelig - skare i den store fauna af afbildninger, er det en meget vigtig skare. Dels fordi den i sig selv indfanger nogle centrale egenskaber ved verden og matematikken, og dels fordi den ved at bestå af særligt 'tamme' afbildninger er hovedhjælpemidlet til at analysere og forstå mere 'vilde' eksemplarer i afbildningsfaunaen.

Ingen af de ovenfor omtalte afbildninger er faktisk lineære. Imidlertid er vi stødt på lineære afbildninger i den 'motiverende' indledning, selv om vi ikke kaldte dem sådan dér, og selv om vi endnu ikke har defineret begrebet. Således så vi i eksemplet *Bageriet* en situation, hvor der til et givet et produktkrav $\underline{x}$ - en vektor i R^n skrevet som en $n \times 1$-søjle - svarede til et råvarebehov $\underline{y}$ - en vektor i R^p skrevet som en $p \times 1$-søjle - bestemt af $\underline{y} = A\underline{x}$. Her er A den $p \times n$-matrix der beskriver produktionsgangen. (*Bemærk* at vi her har byttet om på den rolle som n og p spiller i forhold til bageri-eksemplet.) Det betyder i virkeligheden, at der til ethvert $\underline{x} \in R^n$ - hvoraf kun nogle er bagningsmæssigt realistiske, hvilket vi ser bort fra - svarer et $\underline{y} \in R^p$ - hvoraf igen kun nogle er realistiske. Dermed har vi at gøre med en afbildning

$$F : R^n \rightarrow R^p,$$

givet ved $\underline{y} = F(\underline{x}) = A\underline{x}$.

I indledningskapitlet indføres i eksemplet *Markedsandele* en afbildning af R^3 ind i R^3, givet ved $F(\underline{v}) = A\underline{v}$, hvor $\underline{v}$ angiver de tre bryggeriers markedsandele i en bestemt måned, og $F(\underline{v})$ markedsandelene i den følgende måned. I eksemplet *Populationer* havde vi at gøre med afbildningen $F : R^k \to R^k$ bestemt ved

$$\underline{n}(1) = F(\underline{n}(0)) = L\underline{n}(0),$$

hvor L er en Leslie-matrix, og $\underline{n}(0)$ og $\underline{n}(1)$ er k-vektorer skrevet som søjler, og som repræsenterer populationssammensætningen til perioderne 0 og 1.

Endelig betragtedes *Geometriske Transformationer*, som rotationer, drejninger og punktmultiplikation ud fra $\underline{0}$, der alle er afbildninger af R^2 ind i R^2 af formen $\underline{y} = A\underline{x}$.

Læg mærke til, at i alle disse eksempler var afbildningerne givet ved forskrifter af formen $\underline{y} = A\underline{x}$, hvor $\underline{y}$ og $\underline{x}$ er vektorer i passende talrum og A en dertil svarende matrix. Det vil lidt senere vise sig at dette netop er karakteriserende for de lineære afbildninger, men det er ikke sådan de defineres. Det sker på følgende måde:

5.2 Begrebet lineær afbildning

Vi har at gøre med to talrum R^n og R^p, hvor n og p kan være hvilke som helst naturlige tal. En afbildning

$$F : R^n \to R^p$$

siges at være **lineær**, hvis F tilfredsstiller følgende to krav:

(1) For vilkårlige $\underline{x}$ og $\underline{y}$ i R^n er:

$$F(\underline{x} + \underline{y}) = F(\underline{x}) + F(\underline{y}) \qquad (F \text{ er } \textbf{additiv})$$

(2) For enhver vektor $\underline{x}$ i R^n og enhver skalar α er:

$$F(\alpha\underline{x}) = \alpha F(\underline{x}) \qquad (F \textbf{ respekterer skalering}).$$

De to krav (1) og (2) kan sammenfattes til ét:

(L) For vilkårlige vektorer $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ og vilkårlige skalarer α og β er:

$$F(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) = \alpha F(\underline{x}) + \beta F(\underline{y})$$

(F **respekterer linearkombinering**).

Øvelse: Gør rede for at (1) og (2) er identiske med (L). •

Når $n = p$, dvs $F : R^n \to R^n$, bruges ofte betegelsen en **lineær transformation** om F.

B1: Lineære afbildninger bærer deres navn med rette. *De afbilder en ret linie i en ret linie (eller i ét punkt).* Den typiske rette linie i R^n er nemlig bestemt ved at gå gennem punktet $\underline{b}$ med retningen $\underline{a}$, hvor $\underline{a}$ ikke er $\underline{0}$. Den er derfor givet ved

$$\{t\underline{a} + \underline{b} \mid t \in R\}.$$

For ethvert punkt på denne linie har vi, da F jo respekterer linearkombinering, at

$$F(t\underline{a} + \underline{b}) = tF(\underline{a}) + F(\underline{b}).$$

Det viser, at ethvert punkt på linien i R^n givet ved $\underline{a}$ og $\underline{b}$ afbildes på et punkt på linien i R^p gennem punktet $F(\underline{b})$ med retningen $F(\underline{a})$. Dette forudsætter dog at $F(\underline{a})$ er forskellig fra $\underline{0}$, da der ellers ikke er tale om nogen ret linie, men kun om punktet $F(\underline{b})$. I det tilfælde hvor der er tale om en ret linie, kommer alle punkter på linien med som billede ved F af en et punkt på den oprindelige linie. For punktet givet ved $tF(\underline{a})+F(\underline{b})$, dvs med parameterværdien t, er jo billede af $t\underline{a}+\underline{b}$ svarende til den samme parameterværdi.

Eksempel 1

De lineære afbildninger fra R ind i R - svarende til $n = p = 1$ - må specielt opfylde $F(\alpha x) = \alpha F(x)$ for alle $x \in R$ og alle $\alpha \in R$. Det er der meget få slags funktioner der kan stå model til. Vi har nemlig for ethvert $x \in R$, at

$$F(x) = F(x \cdot 1) = xF(1),$$

idet x som reelt tal både kan opfattes som en vektor i R - det sker i $F(x)$ - og som en skalar - det sker i $F(x \cdot 1)$ og i $xF(1)$. Kalder vi konstanten $F(1)$ for c, har vi altså at F må være givet ved

$$F(x) = cx, \text{ for } x \in R.$$

Det er bemærkelsesværdigt, at dette er en følge alene af at F skal respektere skalering. Additivitetskravet har ikke været inddraget i ræsonnementet.

En sådan funktion kaldes af oplagte grunde for en *proportionalitet*. Enhver proportionalitet opfylder åbenbart fordringerne til en lineær afbildning, og altså også additivitetskravet - check selv! *Af lineære funktioner af R ind i R findes der altså ikke andre end netop proportionaliteterne.*

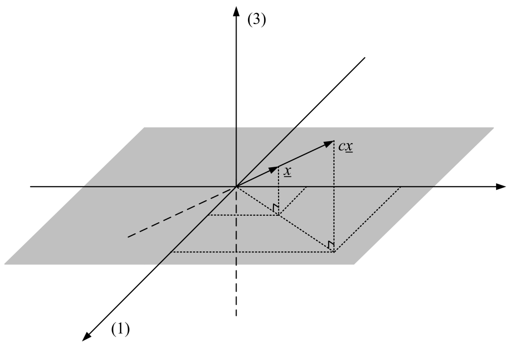
Så fredelige funktioner som

$$F(x) = cx + d,$$

med d forskellig fra 0, er altså ikke lineære. Vi har da fx $F(2) = 2c + d$, der jo *ikke* er lig $(c + d) + (c + d) = F(1) + F(1)$. *

Eksempel 2

Også i R^n er **proportionaliteterne**, dvs afbildninger af R^n ind i R^n givet ved



Figur 5.1 En proprotionalitet i R^3.

$$F(\underline{x}) = c\underline{x},$$

interessante lineære afbildninger (jfr figur 5.1) - kontrollér selv om linearitetskravene er opfyldt.

Der er imidlertid mange andre lineære afbildninger. Fx er i R^2, afbildningen F defineret ved - spejling i x-aksen

$$F(x, y) = (x, -y), \quad \text{for} \quad (x, y) \in R^2$$

lineær. Vi har nemlig for vilkårlige (u, v), (x, y) i R^2 og vilkårlige α og β i R at

$$\begin{aligned} F(\alpha(u, v) + \beta(x, y)) &= F(\alpha u + \beta x, \alpha v + \beta y) \\ &= (\alpha u + \beta x, -\alpha v - \beta y) \\ &= (\alpha u, -\alpha v) + (\beta x, -\beta y) \\ &= \alpha(u, -v) + \beta(x, -y) \\ &= \alpha F(u, v) + \beta F(x, y), \end{aligned}$$

hvilket viser at F respekterer linearkombinering. *

Eksempel 3

Et andet vigtigt eksempel på lineære afbildninger - denne gang af R^n ind i R - har vi i funktioner af typen

$$F(\underline{x}) = F(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n, \quad \text{for} \quad \underline{x} \in R^n$$

hvor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er et vilkårligt, men fast sæt af reelle tal. At F virkelig er en lineær afbildning ses af, at

$$\begin{aligned} F(\underline{x} + \underline{y}) &= a_1(x_1 + y_1) + a_2(x_2 + y_2) + \ldots + a_n(x_n + y_n) \\ &= a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n + a_1y_1 + a_2y_2 + \ldots + a_ny_n \\ &= F(\underline{x}) + F(\underline{y}) \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}F(\alpha\underline{x}) &= a_1(\alpha x_1) + a_2(\alpha x_2) + \ldots + a_n(\alpha x_n)\\ &= \alpha(a_1x_1 + a_2x_2 + \ldots + a_nx_n)\\ &= \alpha F(\underline{x}).\ *\end{aligned}$$

Også dette afsnit afsluttes med et par almene observationer/bemærkninger:

B2: For enhver lineær afbildning $F : R^n \to R^p$ gælder, at $F(\underline{0}) = \underline{0}$ - hvor vi tillader os at benytte betegnelsen $\underline{0}$ for nulvektoren i både R^n og R^p. Udsagnet følger fx af at F respekterer skalering: $F(\underline{0}) = F(0 \cdot \underline{0}) = 0F(\underline{0}) = \underline{0}$. (Vis, som en øvelse, at det også følger af at F er additiv.)

B3: Afbildningen $F : R^n \to R^p$, som er *konstant $\underline{0}$*, dvs er defineret ved

$$F(\underline{x}) = \underline{0}, \quad \text{for alle } \underline{x} \in R^n,$$

er tydeligvis *en lineær afbildning*, og ingen andre konstante funktioner er lineære! (check selv begge dele.)

B4: OBS! Vigtigt! Hvis $\underline{x} \in R^n$ skrives som $n \times 1$ søjle og A er en $p \times n$ matrix, bestemmes ved

$$F(\underline{x}) = A\underline{x},$$

hvor $F(\underline{x})$ skrives som en $p \times 1$ søjle, en lineær afbildning $F : R^n \to R^p$. *Enhver sådan afbildning er lineær*, da vi fra det indledende kapitel har, at

$$\begin{aligned}A(\underline{x} + \underline{x}') &= A\underline{x} + A\underline{x}' && \text{giver}\\ F(\underline{x} + \underline{x}') &= F(\underline{x}) + F(\underline{x}') && \text{og af}\\ A(\alpha\underline{x}) &= \alpha A\underline{x} && \text{får man}\\ F(\alpha\underline{x}) &= \alpha F(\underline{x}),\end{aligned}$$

for alle $\underline{x}, \underline{x}' \in R^n$ og alle $\alpha \in R$. *

Vi skal i det følgende indse, at enhver lineær afbildning mellem to talrum har en sådan matrixfremstilling, når der er valgt baser i de to talrum.

Den næste bemærkning er så vigtig at den ophøjes til en sætning:

Sætning 5.1
En lineær afbildning afbilder et underrum på et underrum.

Bevis
Hvis den lineære afbildning hedder $F : R^n \to R^p$, og $\mathbf{U}$ er et underrum i R^n, bliver

påstanden i sætningen altså, at billedrummet $F(\mathbf{U})$ - som per definition er den mængde i R^p som indeholder alle billeder af vektorer i $\mathbf{U}$ - er et underrum i R^p. Det kan vi bevise ved at godtgøre, at $F(\mathbf{U})$ opfylder underrumskravene (1) og (2).

Først (1): Hvis $\underline{y}$ og $\underline{y}'$ ligger i $F(\mathbf{U})$, da har de formen

$$\underline{y} = F(\underline{x}) \quad \text{og} \quad \underline{y}' = F(\underline{x}'),$$

hvor $\underline{x}, \underline{x}' \in \mathbf{U}$. Da $\mathbf{U}$ er et underrum vil $\underline{x}+\underline{x}'$ tilhøre $\mathbf{U}$. Da der desuden - på grund af F's linearitet - gælder, at

$$\underline{y} + \underline{y}' = F(\underline{x}) + F(\underline{x}') = F(\underline{x} + \underline{x}'),$$

ser vi at $\underline{y} + \underline{y}'$ er billede ved F af en vektor - $\underline{x} + \underline{x}'$ fra $\mathbf{U}$. Det betyder, at $\underline{y} + \underline{y}'$ befinder sig i $F(\mathbf{U})$.

Dernæst (2): Hvis $\underline{y} \in F(\mathbf{U})$, og $\alpha \in R$, gælder at

$$\underline{y} = F(\underline{x}) \quad \text{og} \quad \alpha\underline{y} = \alpha F(\underline{x}) = F(\alpha\underline{x}),$$

for et $\underline{x} \in \mathbf{U}$. Da $\alpha\underline{x} \in \mathbf{U}$, fordi $\mathbf{U}$ er et underrum, er $\alpha\underline{y} = F(\alpha\underline{x})$ billedet ved F af en vektor fra $\mathbf{U}$. Det viser, at $\alpha\underline{y}$ befinder sig i $F(\mathbf{U})$. Til sammen opfylder $F(\mathbf{U})$ begge underrumsbetingelser. □

Eftersom R^n specielt er et underrum i sig selv, følger det af denne sætning, at $F(R^n)$ er et underrum i R^p. Dette underrum - der ingenlunde behøver at udfylde hele R^p - kaldes **billedrummet** ved F - dette rum betegnes også med $B(F)$, i analogi til det rum vi straks vil definere.

Mængden af vektorer i R^n, der ved en lineær afbildning

$$F : R^n \to R^p$$

afbildes i $\underline{0}$ i R^p, kaldes **nulrummet** for F. Det benævnes ofte $N(F)$:

$$N(F) = \{\underline{x} \in R^n \mid F(\underline{x}) = \underline{0}\}.$$

B5: Nulrummet er et underrum i R^n. Lader vi både $\underline{x}$ og $\underline{x}'$ tilhøre $N(F)$, dvs at $F(\underline{x}) = \underline{0}$ og $F(\underline{x}') = \underline{0}$ og lader α være en vilkårlig skalar. Så vil $F(\underline{x}+\underline{x}') = F(\underline{x})+F(\underline{x}') = \underline{0}$, dvs $\underline{x} + \underline{x}' \in N(F)$, og $F(\alpha\underline{x}) = \alpha F(\underline{x}) = \underline{0}$, dvs $\alpha\underline{x} \in N(F)$. Dette viser, at $N(F)$ opfylder de to underrumsbetingelser.

5.3 Matrixfremstillinger af lineære afbildninger

Hvilke slags lineære afbildninger findes der mellem to talrum? I dette afsnit vil spørgsmålet blive behandlet. *Pointen i alt det følgende er, at en lineær afbildning er helt fastlagt ved sine billeder (i R^p) af en basis (i R^n). Det skyldes at enhver lineær afbildning respekterer linearkombinering. Derved er dens billede af en vilkårlig vektor -*

der kan fremstilles som linearkombination af de givne basisvektorer - lig den tilsvarende linearkombination af basisvektorernes billeder.

Lad os nu forestille os de involverede talrum R^n og R^p forsynet med baser, henholdsvis $\underline{a}_1, \underline{a}_2, \ldots, \underline{a}_n$ for R^n og $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_p$ for R^p. Disse baser kan være vilkårlige, og de behøver således ikke at bestå af grundvektorerne i de to rum, selv om den mulighed også er dækket af de følgende betragtninger.

For at få et overblik over hvordan F virker, fremstiller vi alle vektorer i R^n, respektive R^p, ved hjælp af deres koordinater i de valgte baser:

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{a}_n$$

og

$$\underline{y} = \beta_1 \underline{b}_1 + \beta_2 \underline{b}_2 + \ldots + \beta_p \underline{b}_p.$$

Da F er lineær, gælder så at

$$\begin{aligned} y = F(\underline{x}) &= F(\alpha_1 \underline{a}_1 + \alpha_2 \underline{a}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{a}_n) \\ &= \alpha_1 F(\underline{a}_1) + \alpha_2 F(\underline{a}_2) + \ldots + \alpha_n F(\underline{a}_n). \end{aligned}$$

Nu har alle vektorerne $F(\underline{a}_1), F(\underline{a}_2), \ldots, F(\underline{a}_n)$ hver deres koordinatfremstilling i $\underline{b}$-basen:

$$\begin{aligned} F(\underline{a}_1) &= c_{11} \underline{b}_1 + c_{21} \underline{b}_2 + \ldots + c_{p1} \underline{b}_p \\ F(\underline{a}_2) &= c_{12} \underline{b}_1 + c_{22} \underline{b}_2 + \ldots + c_{p2} \underline{b}_p \\ &\vdots \\ F(\underline{a}_n) &= c_{1n} \underline{b}_1 + c_{2n} \underline{b}_2 + \ldots + c_{pn} \underline{b}_p, \end{aligned}$$

hvor det andet index i c_{ij} refererer til $\underline{a}$-nummeret j, mens det første refererer til den $\underline{b}$-vektor c_{ij} er koefficient til. Indsættes dette i fremstillingen for $F(\underline{x})$ ovenfor, finder vi

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) = \; & \alpha_1 (c_{11} \underline{b}_1 + c_{21} \underline{b}_2 + \ldots + c_{p1} \underline{b}_p) + \\ & \alpha_2 (c_{12} \underline{b}_1 + c_{22} \underline{b}_2 + \ldots + c_{p2} \underline{b}_p) + \\ & \vdots \\ & \alpha_n (c_{1n} \underline{b}_1 + c_{2n} \underline{b}_2 + \ldots + c_{pn} \underline{b}_p), \end{aligned}$$

der ved ordning efter $\underline{b}$-erne bliver til

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) = \; & (c_{11} \alpha_1 + c_{12} \alpha_2 + \ldots + c_{1n} \alpha_n) \underline{b}_1 + \\ & (c_{21} \alpha_1 + c_{22} \alpha_2 + \ldots + c_{2n} \alpha_n) \underline{b}_2 + \\ & \vdots \\ & (c_{p1} \alpha_1 + c_{p2} \alpha_2 + \ldots + c_{pn} \alpha_n) \underline{b}_p. \end{aligned}$$

Da $y = F(\underline{x})$ samtidigt har koordinaterne $(\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_p)$ i $\underline{b}$-basen bliver

$$\begin{aligned}
\beta_1 &= c_{11}\alpha_1 + c_{12}\alpha_2 + \ldots + c_{1n}\alpha_n \\
\beta_2 &= c_{21}\alpha_1 + c_{22}\alpha_2 + \ldots + c_{2n}\alpha_n \\
&\vdots \\
\beta_p &= c_{p1}\alpha_1 + c_{p2}\alpha_2 + \ldots + c_{pn}\alpha_n.
\end{aligned}$$

Dette kan også skrives på matrixform:

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_{11} & c_{12} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \ldots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{p1} & c_{p2} & \ldots & c_{pn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix},$$

eller på kort form

$$\underline{\beta} = A\underline{\alpha},$$

hvor α-søjlen er $\underline{x}$'s koordinater i $\underline{a}$-basen i R^n, og β-søjlen er $F(\underline{x})$'s koordinater i $\underline{b}$-basen i R^p, og hvor A er en $p \times n$ matrix der er karakteriseret ved at dens *j-te søjle udgøres af koordinaterne til billedet af $\underline{a}_j$ - $F(\underline{a}_j)$ - i $\underline{b}$-basen.*

Dette viser, at *enhver lineær afbildning $F : R^n \to R^p$ kan beskrives ved hjælp af en matrix-fremstilling $\underline{\beta} = A\underline{\alpha}$, hvor $\underline{\alpha}$ og $\underline{\beta}$ betegner koordinaterne for $\underline{x}$, henholdsvis $F(\underline{x})$, i forhold til vilkårligt valgte baser i henholdsvis R^n og R^p.* Fremstillingen afhænger naturligvis af de valgte baser. Læg specielt mærke til, at det ikke er den samme matrix A der optræder i enhver situation - vælges andre baser i R^n eller R^p fås en anden matrix A.

Resultatet gælder specielt, hvis vi fra begyndelsen har valgt *grundvektorerne som baser i begge rum.* I så fald er koordinatsættet for $\underline{x}$ lig med $\underline{x}$ selv, og tilsvarende er koordinatsættet for $F(\underline{x})$ lig med $F(\underline{x})$ selv. I denne situation forbinder matrixfremstillingen altså direkte vektoren $\underline{x}$ selv med dens billede $F(\underline{x})$:

$$F(\underline{x}) = A\underline{x}. \tag{5.1}$$

Sammenholdes dette resultat med en tidligere bemærkning om at *enhver* afbildning defineret ved en forskrift af typen (5.1) er lineær, har vi nu indset at de *lineære afbildninger mellem to talrum netop er dem som er bestem af forskriften $F(\underline{x}) = A\underline{x}$, når grundvektorerne i de to rum er valgt som baser.*

Eksempel 4

Vi betragter nu en lineær afbildning $F : R^3 \to R^2$, hvor vi har valgt grundvektorbaserne $\{\underline{e}_1, \underline{e}_2, \underline{e}_3\}$ og $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ i de to rum. Samtidigt antager vi at

$$\begin{aligned}
F(\underline{e}_1) &= \ \ 3\underline{f}_1 + 2\underline{f}_2 \\
F(\underline{e}_2) &= -\underline{f}_1 + \ \underline{f}_2 \\
F(\underline{e}_1) &= \quad \underline{f}_1 - 2\underline{f}_2
\end{aligned}$$

Så er fx $F(\underline{e}_1)$'s koordinater $(3, 2)$ i basen $\{\underline{f}_1, \underline{f}_2\}$ i R^2, og den til F svarende matrix A i forhold til de to baser bliver

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Bemærk at $F(\underline{e}_1)$'s koordinater udgør *1. søjle* i A.

Eksempel 5

Igen ser vi på en lineær afbildning $F : R^3 \to R^3$, hvor vi bruger basen $\{\underline{b}_1, \underline{b}_2, \underline{b}_3\}$ i begge rum (som jo repræsenterer samme rum). Er

$$\begin{aligned} F(\underline{b}_1) &= \phantom{-\underline{b}_1 +{}} 2\underline{b}_2 - \underline{b}_3 \\ F(\underline{b}_2) &= -\underline{b}_1 \phantom{{}+2\underline{b}_2} + 2\underline{b}_3 \\ F(\underline{b}_3) &= 2\underline{b}_1 - \underline{b}_2 \end{aligned}$$

bliver den matrix, der repræsenterer F i forhold til den fælles basis

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 2 \\ 2 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix},$$

hvor fx den 2. *søjle* er $F(\underline{b}_2)$'s koordinater i den fælles basis.

6 Lineære afbildninger og lineære ligningssystemer

Ved hjælp af matrixfremstillingen i det sidste kapitel kan vi beskrive F's billedrum og nulrum på en simpel måde.

At $\underline{y} \in R^p$ tilhører F's billedrum $B(F)$ - eller $F(R^n)$ - betyder, at der findes en vektor $\underline{x} \in R^n$, så $\underline{y} = A\underline{x}$, eller med andre ord:

Vektoren $\underline{y} \in R^p$ tilhører billedrummet for F hvis og kun hvis ligningssystemet $\underline{y} = A\underline{x}$ har en løsning $\underline{x} \in R^n$.

Ligeledes har vi, at $\underline{x} \in R^n$ *tilhører nulrummet for F*, hvis og kun hvis $A\underline{x} = \underline{0}$, dvs *hvis og kun hvis $\underline{x}$ er en løsning til ligningssystemet $A\underline{x} = \underline{0}$.*

Eksempel 1

Lad os betragte den lineære afbildning $F : R^3 \to R^3$ der i en given basis i R^3 er fastlagt ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

For at finde nulrummet for F skal vi altså løse ligningssystemet $A\underline{x} = \underline{0}$, som vi kan løse ved at arbejde på koefficientmatricen således:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 2 & 1 & -1 & | & 0 \\ 1 & 0 & -3 & | & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & -1 & -5 & | & 0 \\ 0 & -1 & -5 & | & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & 0 \\ 0 & 1 & 5 & | & 0 \\ 0 & 0 & 0 & | & 0 \end{pmatrix}.$$

Heraf ser vi at x_3 kan vælges frit, fx $x_3 = 1$, og hermed bliver $x_2 = -5$ og $x_1 = 3$. Til sammen betyder det, at

$$N(F) = span\{(3, -5, 1)\},$$

dvs at $dimN(F) = 1$. På tilsvarende måde kan man af $A\underline{x} = \underline{y}$ finde de $\underline{y}$ der ligger i $B(F)$:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & y_1 \\ 2 & 1 & -1 & | & y_2 \\ 1 & 0 & -3 & | & y_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & y_1 \\ 0 & -1 & -5 & | & y_2 - 2y_1 \\ 0 & -1 & -5 & | & y_3 - y_1 \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & | & y_1 \\ 0 & 1 & 5 & | & 2y_1 - y_2 \\ 0 & 0 & 0 & | & y_1 - y_2 + y_3 \end{pmatrix},$$

og den sidste linie i den sidste matrix viser, at ligningssystemet *kun* vil have en løsning, hvis $y_1 - y_2 + y_3 = 0$, dvs

$$B(F) = \{\underline{y} \in R^3 \mid y_1 - y_2 + y_3 = 0\},$$

der beskriver en plan i R^3, og derfor er $dimB(F) = 2$. *

Af eksempel 1 kan vi se at $dimN(F) + dimB(F) = 1 + 2 = 3 = dimR^3$. Dette er ingenlunde en tilfældighed, og vi vil i den følgende sætning vise det vigtige resultat, at denne sammenhæng mellem dimensionerne for nulrum og billedrum gælder for enhver lineær afbildning $F : R^n \to R^p$. Inden vi når dertil, er det nok på sin plads at minde om, at *hvis et underrum* **U** *af et talrum udelukkende består af* $\underline{0}$*, tillægger vi* **U** *dimensionen 0.*

6.1 Dimensionssætningen

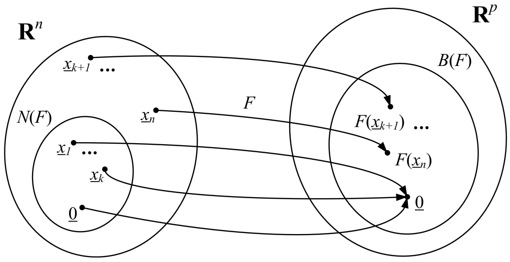
Sætning 6.1 (Dimensionssætningen)
$dimN(F) + dimB(F) = dimR^n = n.$

Inden vi når til beviset, må vi se på hvad sætningen egentlig udsiger. Nulrummet og billedrummet for F skal altså dele dimensionen n - som er et fast tal - mellem sig. Sætningen udtrykker således i skarp form den lidt løse intuition, at jo større nulrummet for F er - dvs jo flere vektorer i R^n, der ved F sendes i $\underline{0}$ i R^p - jo 'færre forskellige værdier' kan F antage - dvs jo mindre fylder billedrummet $B(F)$ i R^p. Hvis nulrummet alene består af nulvektoren, har billedrummet samme dimension som definitionsrummet for F. I alle andre tilfælde vil billedrummets dimension være mindre end definitionsrummets. En lineær afbildning kan altså aldrig 'blæse sit definitionsrum op'.

Bevis (se figur 6.1):
Første betragtes den situation, hvor $N(F)$ ikke kun består af $\underline{0}$. Lad $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ være en basis for $N(F)$.

(1) I den ekstreme situation hvor $k = n$, udgør $N(F)$ hele R^n, og så vil $B(F)$ alene bestå af $\underline{0}$ og dermed have dimension 0. I så fald passer påstanden i sætningen åbenbart.

(2) Hvis $k < n$, må der findes en vektor $\underline{x}_{k+1}$ i R^n, der sammen med $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ danner et lineært uafhængigt sæt. I modsat fald ville enhver vektor i R^n være en linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ og altså i strid med at dimensionen af R^n er $n > k$. Hvis $k + 1 = n$ udgør det lineært uafhængige sæt $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k, \underline{x}_{k+1}$ en basis for R^n. Ellers er $k + 1 < n$, og der må på samme måde som før findes en vektor $\underline{x}_{k+2}$, der sammen



Figur 6.1 En lineær afbildning.

med $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k, \underline{x}_{k+1}$ danner et lineært uafhængigt sæt. Sådant kan vi om fornødent fortsætte indtil vi har fundet supplerende vektorer $\underline{x}_{k+1}, \underline{x}_{k+2}, \ldots, \underline{x}_n$, så det samlede sæt $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k, \underline{x}_{k+1}, \underline{x}_{k+2}, \ldots, \underline{x}_n$ er lineært uafhængigt, og dermed - da der er n vektorer - er en basis for R^n.

Nu påstår jeg, at billederne af de tilføjede vektorer:

$$F(\underline{x}_{k+1}), F(\underline{x}_{k+2}), \ldots, F(\underline{x}_n)$$

udgør en basis for billedrummet $B(F)$. Hvis det er rigtigt er sætningen bevist i det betragtede tilfælde. Der findes jo så $n - k = dim R^n - dim N(F)$ basisvektorer for $B(F)$.

(2a) Først indser vi at $F(\underline{x}_{k+1}), F(\underline{x}_{k+2}), \ldots, F(\underline{x}_n)$ er lineært uafhængige i R^p. Lad derfor

$$\alpha_{k+1} F(\underline{x}_{k+1}) + \alpha_{k+2} F(\underline{x}_{k+2}) + \ldots + \alpha_n F(\underline{x}_n) = \underline{0} \tag{6.1}$$

være en fremstilling af nulvektoren i R^p. På grund af F's linearitet, gælder så, at

$$F(\alpha_{k+1}\underline{x}_{k+1} + \alpha_{k+2}\underline{x}_{k+2} + \ldots + \alpha_n \underline{x}_n) = \underline{0},$$

hvilket viser, at vektoren $\alpha_{k+1}\underline{x}_{k+1} + \alpha_{k+2}\underline{x}_{k+2} + \ldots + \alpha_n \underline{x}_n$ ligger i nulrummet for F. Den må derfor være en linearkombination af $N(F)$-basen $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$. Nu må alle α-erne være 0. Hvis ikke de var det, måtte mindst ét være forskelligt fra 0, fx α_{k+j}, sådan at $\underline{x}_{k+j}$ ville være linearkombination af de øvrigt $\underline{x}$-er - altså $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_{k+j-1}, \underline{x}_{k+j+1}, \cdots, \underline{x}_n$ - i strid med at $\underline{x}$-erne er lineært uafhængige. Men når nu alle α-erne er 0, bliver fremstillingen (6.1) triviel. Da dette vil gælde for enhver sådan fremstilling, er $F(\underline{x}_{k+1}), F(\underline{x}_{k+2}), \ldots, F(\underline{x}_n)$ lineært uafhængige som påstået.

(2b) Dernæst skal det godtgøres, at $F(\underline{x}_{k+1}), F(\underline{x}_{k+2}), \ldots, F(\underline{x}_n)$ udspænder billedrummet for F. Vi ser på et $\underline{y} \in B(F)$, hvortil der jo eksisterer et $\underline{x} \in R^n$, så $\underline{y} = F(\underline{x})$. Da $\underline{x}$-erne udgør en basis for R^n har $\underline{x}$ en fremstilling

$$\underline{x} = \alpha_1 \underline{x}_1 + \alpha_2 \underline{x}_2 + \ldots + \alpha_k \underline{x}_k + \alpha_{k+1}\underline{x}_{k+1} + \alpha_{k+2}\underline{x}_{k+2} + \ldots + \alpha_n \underline{x}_n$$

med passende α-er som koordinater. Da F er lineær gælder, at

$$
\begin{aligned}
\underline{y} &= F(\underline{x}) \\
&= F(\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_k\underline{x}_k + \alpha_{k+1}\underline{x}_{k+1} + \alpha_{k+2}\underline{x}_{k+2} + \ldots + \alpha_n\underline{x}_n) \\
&= \alpha_1 F(\underline{x}_1) + \alpha_2 F(\underline{x}_2) + \ldots + \alpha_k F(\underline{x}_k) + \alpha_{k+1} F(\underline{x}_{k+1}) + \alpha_{k+2} F(\underline{x}_{k+2}) + \ldots + \alpha_n F(\underline{x}_n).
\end{aligned}
$$

Men her ligger $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ i $N(F)$, så de afbildes alle af F i $\underline{0}$. Derved bliver

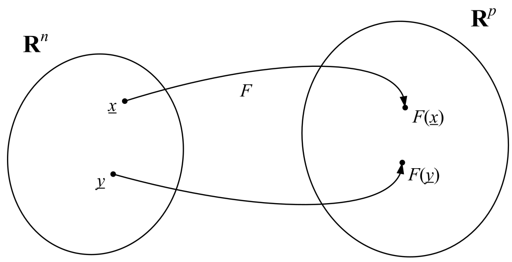
$$\underline{y} = \alpha_{k+1} F(\underline{x}_{k+1}) + \alpha_{k+2} F(\underline{x}_{k+2}) + \ldots + \alpha_n F(\underline{x}_n).$$

Derfor er $\underline{y}$ frembragt af $F(\underline{x}_{k+1}), F(\underline{x}_{k+2}), \ldots, F(\underline{x}_n)$ som påstået.
Altså udspænder disse vektorer billedrummet for F.

(3) Vi mangler blot at behandle den situation hvor $N(F)$ kun omfatter $\underline{0}$. I den sitution skal vi blot indse at $dimB(F) = n$. Her kan vi blot vælge en basis $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_n$ for R^n. Billedet af disse basisvektorer vil med nøjagtigt de samme argumenter som under (2b) udspænde $B(F)$. □

Kender vi dimensionen af nulrummet for den lineære afbildning F, fortæller dimensionssætningen noget om hvor meget F 'klapper R^n sammen' under afbildningen.

Hvis $N(F) = \{\underline{0}\}$ klapper F overhovedet ikke R^n sammen. Det leder os til en vigtig definition, som tager udgangspunkt i et kendt(?) begreb *en injektiv afbildning*. Begrebet får imidlertid en anden iklædning, når afbildningen er lineær.



Figur 6.2 Injektivitet.

En (lineær) afbildning kaldes **injektiv**, hvis to forskellige vektorer i R^n altid har forskellige billeder i R^p, eller for at være præcis, hvis og kun hvis F opfylder:

(i1) For alle $\underline{x}, \underline{y} \in R^n$ vil $F(\underline{x}) = F(\underline{y})$ medfører, at $\underline{x} = \underline{y}$.

Det viser sig ikke nødvendigt at undersøge kravet i (i1) for alle par $\underline{x}$ og $\underline{y}$. Man kan nøjes med at undersøge den tilsyneladende svagere betingelse om andre vektorer end $\underline{0}$ ved F afbildes i $\underline{0}$. Der gælder nemlig:

S1: F er injektiv hvis og kun hvis F opfylder:

(i2) *For alle $\underline{x} \in R^n$ vil $F(\underline{x}) = \underline{0}$ medfører, at $\underline{x} = \underline{0}$.*

At denne påstand er sand, ser vi således: Det er klart at (i1) medfører (i2), da (i2) er det specialtilfælde af (i1), hvor $\underline{x} = \underline{x}$ og $\underline{y} = \underline{0}$ - og vi tillige benytter at $F(\underline{0}) = \underline{0}$. Men (i2) vil også medfører (i1). For hvis $\underline{x}$ og $\underline{y}$ er vilkårlige vektorer i R^n, så $F(\underline{x}) = F(\underline{y})$, er $F(\underline{x} - \underline{y}) = \underline{0}$, fordi F er lineær. Så aktiverer vi (i2) på vektoren $\underline{x} - \underline{y}$ og slutter deraf at $\underline{x} - \underline{y} = \underline{0}$, eller anderledes sagt, at $\underline{x} = \underline{y}$. Nu har vi så vist at (i1) også er en konsekvens af (i2).

Da betingelsen (i2) kommer ud på, at nulrummet for F - $N(F)$ - alene består af $\underline{0}$, kan vi levere en ækvivalent formulering af det netop fundne:

(i3) *F er injektiv netop hvis $N(F) = \{\underline{0}\}$.*

Ved at sammenholde dette med dimensionssætningen, kan vi skaffe endnu en ækvivalent formulering:

(i4) *F er injektiv netop hvis $dinB(F) = dimR^n = n$.*

Og dermed er vi tilbage ved udgangspunktet: F er injektiv netop hvis F ikke klapper definitionsrummet sammen under afbildningen. En sidste ækvivalent formulering kan man få ved at inddrage en matrixfremstilling for $F(\underline{x}) = A\underline{x}$:

(i5) *F er injektiv hvis og kun hvis ligningssystemet $A\underline{x} = \underline{0}$ kun har den trivielle løsning.*

En enkelt vigtig observation er:

S2: Hvis $F : R^n \to R^p$ er injektiv, afbilder F enhver basis i R^n på en basis for $B(F)$. Lad nemlig $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ være en basis for R^n. Så er påstanden at $F(\underline{b}_1), F(\underline{b}_2), \ldots, F(\underline{b}_n)$ vil være en basis for $\mathbf{U} = B(F)$.

For det første vil $F(\underline{b}_1), F(\underline{b}_2), \ldots, F(\underline{b}_n)$ udspænde $\mathbf{U}$. Thi hvis $\underline{y}$ tilhører $\mathbf{U}$, eksisterer der med definitionen af $\mathbf{U}$ et $\underline{x} \in R^n$ så $F(\underline{x}) = \underline{y}$. Når $\underline{b}$-erne er en basis for R^n, må $\underline{x} = \alpha_1\underline{b}_1 + \alpha_2\underline{b}_2 + \ldots + \alpha_n\underline{b}_n$ med passende koefficienter $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$. Så vil vi på grund af F's linearitet få

$$F(\underline{x}) = \alpha_1 F(\underline{b}_1) + \alpha_2 F(\underline{b}_2) + \ldots + \alpha_n F(\underline{b}_n),$$

hvilket demonstrerer at $\underline{y} = F(\underline{x})$ er udspændt af $F(\underline{b}_1), F(\underline{b}_2), \ldots, F(\underline{b}_n)$. Bemærk at vi ikke benytter F's injektivitet i denne del af ræsonnementet!

Dernæst er $F(\underline{b}_1), F(\underline{b}_2), \ldots, F(\underline{b}_n)$ lineært uafhængige. For hvis

$$\alpha_1 F(\underline{b}_1) + \alpha_2 F(\underline{b}_2) + \ldots + \alpha_n F(\underline{b}_n) = \underline{0},$$

er også

$$F(\alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{b}_n) = \underline{0},$$

og da F er injektiv (der var den!) bliver

$$\alpha_1 \underline{b}_1 + \alpha_2 \underline{b}_2 + \ldots + \alpha_n \underline{b}_n = \underline{0}.$$

Nu er $\underline{b}$-erne en basis og de er derfor lineært uafhængige, hvorfor samtlige α-er er 0. Men så er vi færdige - med beviset, altså!

Dimensionssætningen fortæller noget om hvor stor en del F's billedrum faktisk udgør af R^p - det rum F afbilder over i. Fx fortæller den os at billedrummets dimension højst er n. Hvis p er større end n kan billedrummet ikke udfylde hele R^p. Men det er ikke sådan, at bare $p < n$ så er $F(R^n) = B(F) = R^p$, fx kan F's billedrum bestå af $\underline{0}$ alene. Den situation, hvor F's billedrum faktisk udfylder hele R^p, interesserer os så meget, at vi giver den et særligt navn:

En lineær afbildning $F : R^n \to R^p$ kaldes **surjektiv**, hvis F's billedrum udfylder hele R^p, dvs hvis og kun hvis $B(F) = R^p$. Eller anderledes sagt, hvis og kun hvis der for ethvert $\underline{y} \in R^p$ findes et $\underline{x} \in R^n$, så $F(\underline{x}) = \underline{y}$. Vi benytter den malende sprogbrug, at F afbilder R^n **på** R^p.

I matrixformulering - stadig med $F(\underline{x}) = A\underline{x}$ - udtrykkes surjektiviteten således:

F er surjektiv hvis og kun hvis der for ethvert $\underline{y} \in R^p$ er en løsning $\underline{x} \in R^n$ til ligningssystemet $\underline{y} = A\underline{x}$.

S3: Af dimensionssætningen slutter vi, at *hvis F er surjektiv, er $dim N(F) = n - p$.* Hvis derfor specielt $n = p$, er $dim N(F) = 0$, således at F også er injektiv, dvs *en surjektiv afbildning af et talrum* **på sig selv** *er også injektiv.* Dimensionssætningen viser også at, hvis $F : R^n \to R^n$ (altså $n = p$) er *injektiv, er den også surjektiv*, da $dim B(F) = n - dim N(F) = n - 0 = n$. Sådan forholder det sig ikke i almindelighed. Injektivitet og surjektivitet er uafhængige egenskaber, sådan at forstå, at en afbildning kan være surjektiv uden at være injektiv eller omvendt. Se selv de følgende to eksempler.

Eksempel 2

Den lineære afbildning $F : R^2 \to R^4$ givet ved

$$F(x, y) = (x + y, x - y, 2x + 3y, \tfrac{1}{2}x - 4y)$$

(hvorfor er den forresten lineær?), er injektiv. Da

$$F(x, y) = \underline{0}$$

netop hvis $x + y = 0,\ x - y = 0,\ 2x + 3y = 0,\ \frac{1}{2}x - 4y = 0,$ hvilket er ensbetydende med at $x = 0$ og $y = 0$, sådan at nulrummet for F alene består af $\underline{0}$. Derimod er F ikke surjektiv, da dimensionen af billedrummet er lig 2 - dimensionssætningen slår til igen - mens R^4 har dimension 4. *

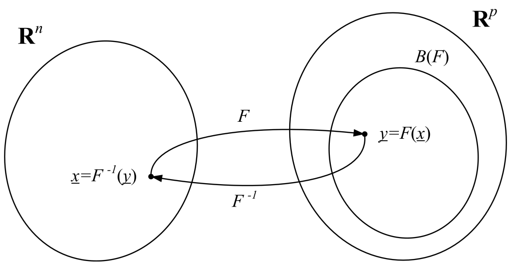
Eksempel 3

Den lineære afbildning $G : R^3 \to R^2$ defineret ved

$$G(x, y, z) = (x, y)$$

er øjensynlig surjektiv, da enhver vektor i R^2 - (x, y) - er billede ved G af en vektor i R^3, ja faktisk af uendeligt mange vektorer - nemlig alle de vektorer der har formen $(x, y, \textit{hvad som helst})$. Det er samtidigt klart, at G ikke er injektiv, da fx både $(x, y, 0)$ og $(x, y, 1)$ afbildes i (x, y). *

De lineære afbildninger der er *både injektive og surjektive* er af stor vigtighed, hvorfor de tildeles et særligt navn: De kaldes **bijektive**. Ofte kaldes en bijektiv afbildning også en **énentydig korrespondance**.



Figur 6.3 Omvendt afbildning.

S4: At en lineær afbildning $F : R^n \to R^p$ er *bijektiv* kan udtrykkes: *enhver vektor i R^p er billede ved F af netop én vektor i R^n*. I kraft af *S3* kan dette kun finde sted, hvis $n = p$.

Øvelse: Opskriv en række ækvivalente formuleringer af bijektivitetsegenskaben ved at sammenkoble de forskellige formuleringer af injektiviteten med de forskellige formuleringer af surjektiviteten. •

Selv om en injektiv afbildning ikke nødvendigvis er surjektiv på *hele* R^p, vil den naturligvis være surjektiv på billedrummet $B(F)$, idet jo enhver vektor i billedrummet selvfølgelig er billede af en vektor i R^n. Den er altså en bijektiv afbildning fra R^n

til $B(F)$. Vi siger da, at R^n og $B(F)$ er i *énentydig korrespondance*. Enhver vektor $\underline{y} \in B(F)$ er billede af netop én vektor $\underline{x} \in R^n$. Denne vektor betegnes $F^{-1}(\underline{y})$. Derved fastlægges en afbildning

$$F^{-1} : B(F) \to R^n.$$

Afbildningen kaldes **den omvendte afbildning til** F - jfr figur 6.3. *Enhver injektiv afbildning har altså en omvendt, defineret på dens billedrum.*

6.2 Det sidste om lineære ligningsystemer

Vi afrunder dette afsnit med at analysere *løsningsforholdene for lineære ligningssystemer* ved hjælp af det apparat vi nu har opstillet.

Lad os betragte et vilkårligt lineært ligningssystem

$$A\underline{x} = \underline{b} \tag{6.2}$$

hvor A er en $p \times n$-matrix, $\underline{x}$ er en vektor i R^n opskrevet som søjle, og $\underline{b}$ en vektor i R^p skrevet som søjle. Hvis $\underline{b} = \underline{0}$ kaldes ligningssystemet **homogent**, og hvis $\underline{b} \neq \underline{0}$ kaldes det **inhomogent**. Mængden af løsninger til (6.2) kaldes **løsningsrummet**.

Vi betragter først det *homogene system* - $A\underline{x} = \underline{0}$. Løsningsrummet for dette system udgør netop *nulrummet* for den lineære afbildning $F : R^n \to R^p$, hvis matrix er A - når grundvektorerne er valgt som baser i begge rum. Løsningsrummet for det homogene system er altså et *underrum* i R^n. Et homogent ligningssystem har *altid løsninger*, om ikke andet så kun $\underline{0}$.

Spørgsmålet er nu: For hvilke andre $\underline{b} \in R^p$ har ligningssystemet (6.2) overhovedet løsninger? Svaret er, at *ligningssystemet har løsninger netop hvis $\underline{b}$ tilhører billedrummet for F*. Eftersom

$$A\underline{x} = x_1\underline{a}_1 + x_2\underline{a}_2 + \ldots + x_n\underline{a}_n$$

- hvor vi med $\underline{a}$-erne har betegnet $p \times 1$-søjlerne i A - er billedrummet for F *udspændt af søjlerne i A*. Billedrummets dimension er altså lig *antallet af lineært uafhængige søjler i A*.

Hvis billedrummet ikke udgør hele R^p, har ligningssystemet ikke løsninger for ethvert $\underline{b}$. Det kan altså sagtens hænde, at der ingen løsninger er.

Man kan vise - men det vil vi afstå fra her - at *antallet af lineært uafhængige søjler i en vilkårlig matrix er det samme som antallet af lineært uafhængige rækker*. Det fælles tal kaldes **matricens rang**, og betegnes ofte med r.

Med andre ord er *billedrummets dimension lig med matricens rang r*.

Ved hjælp af dimensionssætningen slutter vi, at løsningsrummet til til den homogene ligning - der jo er nulrummet for F - har en dimension der er lig

$$n - dimB(F) = n - r.$$

Dette resultat fortjener at blive opstillet som

Sætning 6.2
Løsningsrummet L_h til et **homogent** *ligningssystem $A\underline{x} = \underline{0}$, hvor A er en $p \times n$-matrix, er et underrum af R^n. Dets dimension er lig $n - r$, hvor n altså er antallet af søjler i matricen, og r er matricens rang.*

Hvis et inhomogent ligningssystem $A\underline{x} = \underline{b}$, $\underline{b} \neq \underline{0}$, overhovedet har løsninger, kan løsningsrummet karakteriseres ved hjælp af løsningsrummet for **det tilsvarende homogene** ligningssystem - som det kaldes. Lad nemlig $\underline{x}_0$ være en enkelt løsning - vilkårlig, men fastholdt i dette ræsonnement - til det inhomogene system. En sådan løsning kaldes ofte en **partikulær løsning**. Så vil det om en eventuel anden løsning, $\underline{x}$, til det inhomogene system gælde, at

$$\underline{x} - \underline{x}_0 \text{ er en løsning til det tilsvarende homogene system,}$$

da $A(\underline{x} - \underline{x}_0) = A\underline{x} - A\underline{x}_0 = \underline{b} - \underline{b} = \underline{0}$. Derved tilhører $\underline{x} - \underline{x}_0$ løsningsrummet L_h for det homogene system, eller anderledes sagt,

$$\underline{x} = \underline{x}_0 + \text{ en løsning til det homogene system.}$$

Bruger vi skrivemåden $\underline{x}_0 + L_h$ for mængden

$$\{\underline{x} \in R^n \mid \underline{x} = \underline{x}_0 + \underline{z};\ \underline{z} \in L_h\},$$

og betegner L_{ih} løsningsrummet for det inhomogene system, har vi således

$$L_{ih} = \underline{x}_0 + L_h.$$

En sådan mængde, hvor en fast vektor uden for et givet underrum **U** er adderet til samtlige vektorer i **U**, kaldes et **sideunderrum** til **U**. Mængden er ikke selv et underrum, da den ikke indeholder $\underline{0}$. Selv om et sideunderrum ikke selv er et underrum, giver det ikke anledning til misforståelser at tillægge den samme *dimension* som det tilhørende underrum.

Også her er det på sin plads at opsamle resultaterne i en sætning:

Sætning 6.3
Løsningsrummet for et **inhomogent** *ligningssystem $A\underline{x} = \underline{b}$, hvor A er en $p \times n$-matrix og $\underline{b} \in R^p$ er* **enten** *tomt - nemlig hvis $\underline{b}$ ikke tilhører det underrum i R^p der er udspændt af søjlerne i A -* **eller** *et sideunderrum til løsningsrummet for det tilsvarende homogene system. Dets dimension er $n - r$, hvor n altså er antallet af søjler i matricen og r er matricens rang.*

Med disse sætninger samt de øvrige resultater i hånden, kan vi gøre et par observationer:

S5: Hvis et *homogent* ligningssystem har **fuld rang**, dvs samtlige søjler er lineært uafhængige så at $r = n$, har systemet *ikke andre løsninger end* $\underline{0}$, da løsningsrummet dimension er 0. Hvis et *inhomogent* ligningssystem har fuld rang, har det *enten ingen eller netop én løsning.*

S6: Hvis et *homogent* ligningssystem *ikke har fuld rang*, er $r < n$. Så er der *uendeligt mange* løsninger, da løsningsrummet mindst har dimension 1. Hvis et *inhomogent* ligningssystem ikke har fuld rang, har det *enten ingen løsninger, eller uendeligt mange*, da løsningsmængden er et sideunderrum af dimension mindst 1.

Denne situation foreligger, *hvis et ligningssystem har flere ubekendte end ligninger*. For hvis $p < n$, kan systemet ikke have fuld rang, eftersom antallet af lineært uafhængige søjler er lig antallet af lineært uafhængige rækker.

Eksempel 4

I eksempel 1 på side 63 fandt vi nulrum og billedrum for en lineær afbildning F, der i en given basis var fastlagt ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Vi fandt, at $N(F) = span\{(3, -5, 1)\}$, dvs at $dim N(F) = 1$. Nu ved vi at $rang A = dim B(F) = 2$, og vi kan af A umiddelbart se at en basis for $B(F)$ kan fremstilles af de to første søjler i matricen (hvorfor?). Tillige kan vi se at alle tre søjler vil være lineært afhængige, da

$$3\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -3 \end{pmatrix} = \underline{0}.$$

Bemærk at koefficienterne i denne linearkombination netop er koordinaterne i den vektor der frembringer $N(F)$.

Vi vil nu forsøge også at løse det inhomogene ligningssystem

$$A\underline{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{6.3}$$

Først må vi undersøge, om $(0, 1, 1) \in B(F)$? - dvs om der findes α og β så

$$\alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

hvilket giver $\alpha = 1,\ 2\alpha + \beta = 1,\ \alpha + \beta = 0$. Så svaret er: 'ja', da $\alpha = 1$ og $\beta = -1$. En mulig *partikulær* løsning til det inhomogene ligningssystem er så

$$\underline{x}_0 = (1, -1, 0),$$

og løsningsrummet til (6.3) er herefter

$$L_{ih} = \{\underline{x} \in R^3 \mid \underline{x} = (1, -1, 0) + t(3, -5, 1);\ t \in R\}. *$$

7 Sammensætning af lineære afbildninger

Hidtil har vi kun beskæftiget os med en enkelt lineær afbildning ad gangen. Vi skal nu undersøge hvordan *to lineære afbildninger* kan bringes i spil sammen. For at få en fornemmelse af hvad der er på færde, lægger vi ud med at se på to eksempler.

Eksempel 1

Vi betragter to lineære afbildninger, $F : R^3 \to R^4$ og $G : R^4 \to R^2$, defineret ved forskrifterne $F(\underline{x}) = A\underline{x}$, hvor A er en 4×3-matrix, og $G(\underline{y}) = B\underline{y}$, hvor B er en 2×4-matrix. Lad os se på en situation med konkrete matricer:

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad G(\underline{y}) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}$$

Tager vi nu et $\underline{x} \in R^3$, vil der ved F afbildes en vektor $F(\underline{x})$ i R^4 - altså det rum G virker på. Derfor kan vi danne billedet ved G af $F(\underline{x})$ - det hedder $G(F(\underline{x}))$ og befinder sig i R^2. Alt i alt har vi dannet en afbildning fra R^3 til R^2, defineret ved

$$\underline{x} \to G(F(\underline{x})).$$

Vi vil nu bestemme en forskrift for denne sammensatte afbildning af F og G - der også benævnes $G \circ F$. Først har vi

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ -3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$$

Sendes dette ind i forskriften for G, opstår

$$\begin{aligned} G(F(x_1, x_2, x_3)) &= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 + x_2 + 3x_3 \\ 2x_1 + x_3 \\ -3x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 2x_1 + x_2 + 3x_3 - (2x_1 + x_3) + 2(-3x_2 + 2x_3) \\ 2(-x_1 + 2x_2) - 3(2x_1 + x_2 + 3x_3) + 3(2x_1 + x_3) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} -5x_2 + 6x_3 \\ -2x_1 + x_2 - 6x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 6 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Nettoudbyttet af denne operation er altså en forskrift for den sammensatte afbildning $G \circ F$ af F og G (bemærk at der i $G \circ F$ er byttet om på rækkefølgen, fordi F benyttes først - dvs er tættest på den variabe $\underline{x}$ - mens G benyttes sidst):

$$G(F(x_1, x_2, x_3)) = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 6 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

Heraf ser vi bla, at $G \circ F$ er en lineær afbildning fra R^3 til R^2. Nu er det klart, at matricen for $G \circ F$ er skabt ved hjælp af operationer på elementerne i matricerne A og B, men hvordan det nærmere er foregået fortaber sig i de konkrete talregnerier. *

Nedenfor vil vi trænge ind i mønstret bag regnerierne. Men først endnu et eksempel.

Eksempel 2

I det forgående eksempel var F og G defineret direkte ved deres matrixfremstilling i forhold til baser bestående af grundvektorerne i alle rummene R^2, R^3 og R^4. I dette eksempel er der tale om, at der i de involverede rum er valgt nogle andre baser end grundbaserne.

Afbildningen $F : R^2 \to R^3$ er givet i forhold til, at der i R^2 er valgt basen $\underline{u}_1 = (1, 2)$, $\underline{u}_2 = (0, -1)$, mens der i R^3 er valgt basen $\underline{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\underline{v}_2 = (1, 0, 1)$, $\underline{v}_3 = (0, 0, -1)$. Fx har vektoren $\underline{x} = (x_1, x_2) = (-5, 9)$ koordinaterne $\underline{\xi} = (-5, -19)$ i $\underline{u}$-basen.

I disse baser er $F : R^2 \to R^3$ givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Det vil sige, at hvis $\underline{x}$'s koordinater i $\underline{u}$-basen for R^2 er $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2)$, bliver koordinaterne for $F(\underline{x})$ i $\underline{v}$-basen for R^3 lig

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

På tilsvarende måde antager vi $G : R^3 \to R^2$ givet ved matricen

$$\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Vi fandt, at $F(\underline{x})$'s koordinater i $\underline{v}$-basen var givet ved

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ -2\xi_2 \\ -\xi_1 + 3\xi_2 \end{pmatrix}.$$

Så bliver koordinaterne for $G(F(\underline{x}))$ - ikke at forveksle med $G(F(\underline{x}))$ selv, da vi ikke arbejder i grundbasen - bestemt som

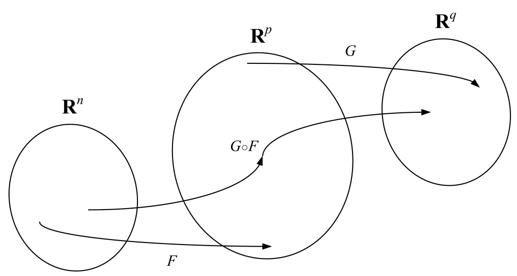
$$\begin{aligned}
\begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 \\ -2\xi_2 \\ -\xi_1 + 3\xi_2 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 2(\xi_1 + \xi_2) - 4(-2\xi_2) \\ 3(\xi_1 + \xi_2) + (-2\xi_2) - 2(-\xi_1 + 3\xi_2) \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2\xi_1 + 10\xi_2 \\ 5\xi_1 - 5\xi_2 \end{pmatrix} \\
&= \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix},
\end{aligned}$$

hvilket viser at også denne gang er $G \circ F$ en lineær afbildning. *

7.1 Matricen for en sammensat afbildning

Vi er nu rustet til at behandle den generelle situation, og vi forstiller os derfor givet to lineære afbildninger

$$F : R^n \to R^p \quad \text{og} \quad G : R^p \to R^q$$



Figur 7.1 En sammensat afbildning.

jfr figur 7.1. Betragter vi et $\underline{x} \in R^n$ vil det ved F afbildes i $F(\underline{x}) \in R^p$, hvor G kan få fingre i det, så $G(F(\underline{x})) \in R^q$. Derved har vi i realiteten at gøre med en afbildning fra R^n ind i R^q. Denne afbildning kaldes den **sammensatte** afbildning af F og G, og den benævnes $G \circ F$. Således er $G \circ F : R^n \to R^q$ defineret ved

$$(G \circ F)(\underline{x}) = G(F(\underline{x})), \quad \underline{x} \in R^n.$$

Det gælder nu - som forventet - at også *den sammensatte afbildning* $G \circ F$ *er lineær.* Dette godtgøres ved at vi indser, at $G \circ F$ respekterer linearkombinering:

$$\begin{aligned}
(G \circ F)(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y}) &= G(F(\alpha\underline{x} + \beta\underline{y})) \\
&= G(\alpha F(\underline{x}) + \beta F(\underline{y})) \\
&= \alpha G(F(\underline{x})) + \beta G(F(\underline{y})) \\
&= \alpha(G \circ F)(\underline{x}) + \beta(G \circ F)(\underline{y}),
\end{aligned}$$

hvor det 2. lighedstegn skyldes at F er lineær, det 3. lighedstegn skyldes at G er lineær, mens det første og sidste lighedstegn kommer af definitionen på $G \circ F$.

Eftersom alle lineære afbildninger har en matrixfremstilling i forhold til givne baser i de involverede rum, gælder det samme for $G \circ F$. Lad der derfor i R^n være valgt basen $\underline{u}_1, \underline{u}_2, \ldots, \underline{u}_n$, og i R^q - som $G \circ F$'s billede jo ligger i - er valgt basen $\underline{w}_1, \underline{w}_2, \ldots, \underline{w}_q$. Der findes så en $q \times n$-matrix C, så at

$$C\underline{\xi}$$

er koordinaterne for $(G \circ F)(\underline{x})$ i $\underline{w}$-basen for R^q, hvis $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ er koordinaterne for $\underline{x}$ i $\underline{u}$-basen for R^n. **OBS!** Der er vigtigt at huske, at $\underline{\xi}$ *ikke er identisk* med $\underline{x}$ og at $C\underline{\xi}$ ikke med $(G \circ F)(\underline{x})$), hvis ikke de valgte baser i de to rum består af grundvektorerne.

Vi vil nu finde ud af hvordan matricen C konkret ser ud. Det vil vi gøre ved at efterforske hvordan $G \circ F$ virker på et $\underline{x} \in R^n$ ud fra vores viden om hvordan F og G virker. Denne viden er lagret i matrixfremstillinger af henholdsvis F og G, når der i R^n og R^q er valgt de nævnte baser, og i R^p også er valgt en basis - $\underline{v}_1, \underline{v}_2, \ldots, \underline{v}_p$.

Vi her altså, at $F(\underline{x})$'s koordinater i $\underline{v}$-basen for R^p er givet ved

$$A\underline{\xi},$$

hvor A er en $p \times n$-matrix. På tilsvarende måde er koordinaterne for $G(\underline{y})$ givet ved

$$B\underline{\tau},$$

hvor $\underline{\tau} = (\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_p)$ er $\underline{y}$'s koordinater i $\underline{v}$-basen for R^p, og hvor B er en $q \times p$-matrix.

Eftersom $\underline{\tau} = A\underline{\xi}$, har vi at $G(F(\underline{x}))$'s koordinater - dvs $(G \circ F)(\underline{x})$'s koordinater - er:

$$C\underline{\xi} = B\underline{\tau} = B(A\underline{\xi}).$$

Da vi nu skal udregne eksplicit hvad dette indebærer, tænker vi os matricerne A og B møbleret således:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{p1} & a_{p2} & \ldots & a_{pn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \ldots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \ldots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{q1} & b_{q2} & \ldots & b_{qp} \end{pmatrix}.$$

Så får vi, idet $\underline{\xi} = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, at $\underline{\tau}$ skrevet som søjle er givet ved

$$\begin{pmatrix} \tau_1 \\ \tau_2 \\ \vdots \\ \tau_p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n \\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n \\ \vdots \\ a_{p1}\xi_1 + a_{p2}\xi_2 + \ldots + a_{pn}\xi_n \end{pmatrix}.$$

Matricen B for afbildningen G skal nu virke på denne vektor, så

$$B\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \vdots\\ \tau_p\end{pmatrix} = B\begin{pmatrix}a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n\\ a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n\\ \vdots\\ a_{p1}\xi_1 + a_{p2}\xi_2 + \ldots + a_{pn}\xi_n\end{pmatrix}.$$

Når B virker på $\underline{\tau}$, bliver resultatet af denne operation en $q \times 1$-søjle. Udtrykt ved elementerne i $\underline{\tau}$-søjlen får vi ved anvendelse af reglerne for multiplikation af en matrix med en (acceptabel) søjle

$$\begin{pmatrix}b_{11}\tau_1 + b_{12}\tau_2 + \ldots + b_{1n}\tau_n\\ b_{21}\tau_1 + b_{22}\tau_2 + \ldots + b_{2n}\tau_n\\ \vdots\\ b_{p1}\tau_1 + b_{p2}\tau_2 + \ldots + b_{pn}\tau_n\end{pmatrix}.$$

Når vi indsætter hvad τ-erne er - jfr søjlen ovenfor - opstår et langt og derfor uoverskueligt - men principielt let forståeligt - udtryk, ét for hvert element i $q \times 1$-søjlen. Dens første element er

$$b_{11}(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n) + b_{12}(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n) + \\ \ldots + b_{1p}(a_{p1}\xi_1 + a_{p2}\xi_2 + \ldots + a_{pn}\xi_n),$$

som vi ved at samle efter ξ-erne kan omordne til

$$(b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \ldots + b_{1p}a_{p1})\xi_1 + (b_{11}a_{12} + b_{12}a_{22} + \ldots + b_{1p}a_{p2})\xi_2 + \\ \ldots + (b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \ldots + b_{1p}a_{pn})\xi_n.$$

Inden vi går videre med de øvrige elementer i søjlen, er det nok værd at se nøjere på, hvad der egentlig står i udtrykket ovenfor. Parentesen foran ξ_1 består af *den første række i B-matricen (matrix) multipliceret med de første søjle i A-matricen.* Parentesen foran ξ_2 består tilsvarende af den første række i B-matricen multipliceret med den anden søjle i A-matricen, og så fremdeles.

Det *andet* element i $q \times 1$-søjlen er skabt efter det samme princip som det første. Det *andet* element er

$$b_{21}(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n) + b_{22}(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n) + \\ \ldots + b_{2p}(a_{p1}\xi_1 + a_{p2}\xi_2 + \ldots + a_{pn}\xi_n),$$

som vi ved atter at samle efter ξ-erne kan omordne til

$$(b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \ldots + b_{2p}a_{p1})\xi_1 + (b_{21}a_{12} + b_{22}a_{22} + \ldots + b_{2p}a_{p2})\xi_2 + \\ \ldots + (b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \ldots + b_{2p}a_{pn})\xi_n.$$

Her er parentesen foran ξ_j, hvor $j = 1, 2, \ldots, n$, lig med den anden række i B-matricen multipliceret med den j'te søjle i A-matricen.

Sådan kan vi fortsætte indtil det sidste - det q'te - element i søjlen, som er

$$b_{q1}(a_{11}\xi_1 + a_{12}\xi_2 + \ldots + a_{1n}\xi_n) + b_{q2}(a_{21}\xi_1 + a_{22}\xi_2 + \ldots + a_{2n}\xi_n) + \\ \ldots + b_{qp}(a_{p1}\xi_1 + a_{p2}\xi_2 + \ldots + a_{pn}\xi_n),$$

som ved ordning efetr ξ-erne bliver til

$$(b_{q1}a_{11} + b_{q2}a_{21} + \ldots + b_{qp}a_{p1})\xi_1 + (b_{q1}a_{12} + b_{q2}a_{22} + \ldots + b_{qp}a_{p2})\xi_2 + \\ \ldots + (b_{q1}a_{1n} + b_{q2}a_{2n} + \ldots + b_{qp}a_{pn})\xi_n.$$

Hermed har vi udtrykt samtlige elementer i koordinatsættet for $G(F(\underline{x}))$ved hjælp af ξ-erne og elementerne i matricerne A og B. Lad os samle hele molevitten i én søjle:

$$\begin{pmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \ldots + b_{1p}a_{p1})\xi_1 + \ldots + (b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \ldots + b_{1p}a_{pn})\xi_n \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \ldots + b_{2p}a_{p1})\xi_1 + \ldots + (b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \ldots + b_{2p}a_{pn})\xi_n \\ \vdots \\ (b_{q1}a_{11} + b_{q2}a_{21} + \ldots + b_{qp}a_{p1})\xi_1 + \ldots + (b_{q1}a_{1n} + b_{q2}a_{2n} + \ldots + b_{qp}a_{pn})\xi_n \end{pmatrix}.$$

Hvis vi anstrenger os lidt for at se igennem tågerne i den formelophobning, opdager vi at søjlens første element er resultatet af en række tal (b, a-parenteser) multipliceret med ξ-søjlen. Det forholder sig lige sådan med de øvrige elementer i søjlen. det viser, at vi har at gøre med en $q \times p$-matrix multipliceret med ξ-søjlen:

$$\begin{pmatrix} (b_{11}a_{11} + b_{12}a_{21} + \ldots + b_{1p}a_{p1}) & \ldots & (b_{11}a_{1n} + b_{12}a_{2n} + \ldots + b_{1p}a_{pn}) \\ (b_{21}a_{11} + b_{22}a_{21} + \ldots + b_{2p}a_{p1}) & \ldots & (b_{21}a_{1n} + b_{22}a_{2n} + \ldots + b_{2p}a_{pn}) \\ & \vdots & \\ (b_{q1}a_{11} + b_{q2}a_{21} + \ldots + b_{qp}a_{p1}) & \ldots & (b_{q1}a_{1n} + b_{q2}a_{2n} + \ldots + b_{qp}a_{pn}) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \vdots \\ \xi_n \end{pmatrix}.$$

Det vi her har fundet er $q \times p$-matricen C for den sammensatte afbildning $G \circ F$. Denne matrix er skabt ved at manøvrere med elementerne i A og B. Imidlertid så vi jo, at koordinaterne for $(G \circ F)(\underline{x}) = G(F(\underline{x}))$ er givet ved $C\underline{\xi} = B(A\underline{\xi})$. Den fundne matrix C benævnes derfor **matrixproduktet** BA af matricerne B og A og noteres:

$$C = BA.$$

Læg mærke til at F's matrix A står til højre og G's matrix B står til venstre i dette matrixprodukt svarende til rækkefølgen af F og G i $G \circ F$.

7.2 Matrixproduktets egenskaber

Allerførst ser vi på, hvordan matrixproduktet BA er fremkommet af A og B. Ved direkte beskuelse af matrixproduktet som det er skrevet op ovenfor, ser vi at $C = BA$ består af q **rækker** og n **søjler**. Dette skal sammenholdes med at B består af q rækker og p søjler, mens A består af p rækker og n søjler. En simpel måde at huske det på er:

$$q \times n = (q \times p)(p \times n)$$

hvor altså antallet - p - af søjler i B lig antallet af rækker i A, 'går ud' af regnestykket.

I samme åndedrag konstaterer vi, at vi *kun kan multiplicere en matrix B med en matrix A (fra højre), hvis antallet af søjler i B er lig antallet af rækker i A*. Det er da uden videre klart, at vi ikke i almindelighed kan forvente at må multiplicere B med A fra venstre. Dette er simpelthen kun muligt, hvis antallet af søjler i A er lig antallet af rækker i B, dvs hvis fx B er en $q \times n$-matrix samtidig med at A er en $n \times q$-matrix. Allerede af denne grund er *matrixproduktet ikke kommutativt.* Men selv om både BA og AB kan dannes, er de sjældent ens. BA er jo en $q \times q$-matrix, mens AB er en $n \times n$-matrix. De har kun mulighed for at være ens, hvis $n = q$, og heller ikke i det tilfælde behøver de to produkter at være ens.

Nå, men hvad står der nu i $C = BA$? Jo, ved første ransagning af udtrykket for C ser vi, at elementet anbragt på plads $(1, 1)$, dvs i første række og første søjle er dannet ved at den første række i B er (matrix)multipliceret med den første søjle i A. De øvrige elementer i den første række af C er dannet ved at den første række i B er multipliceret med de øvrige søjler i A - én ad gangen. I den anden række af C er forholdene tilsvarende, bortset fra at det nu er den anden række af B, der multipliceres med søjlerne fra A for at danne elementerne i den anden række af C. Således fortsætter det. Den almene regel, som vi nedfælder som en *definition* er altså, at

elementet på den (i, j)'te plads i produktmatricen $C = BA$ er skabt ved at den i'te række i B (matrix)multipliceres med den j'te søjle i A.

For en umiddelbar betragtning ser det ud som om, der i selve definitionen af matrixmultiplikation allerede indgår et begreb om matrixmultiplikation. Sådan står det jo udtrykkelig i formuleringen, som derved ser cirkulær ud. Det er den imidlertid ikke, da der i definitionen kun benyttes multiplikation mellem en række og en *søjle* (fra højre), som vi tidligere har indført.

Inden vi kaster os over et par eksempler, lad os da gøre endnu én observation:

B1: Den enkelte søjle i C - lad os sige nr. j - består af rækkerne i B multipliceret med søjle nr. j fra A, med andre ord af matrix-søjleproduktet B(j'te søjle i A) - som tidligere indført. Derfor kan vi *anskue matrixproduktet BA som en sammenstilling af de søjler der fremkommer ved at multiplicere B med søjlerne i A - én efter én.*

Eksempel 3

Matrixproduktet $C = BA$ af 2×4 og 4×3 matricerne fra eksempel 1 på side 75:

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 & 2 \\ 2 & -3 & 3 & 0 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & -3 & 2 \end{pmatrix},$$

er 2×3-matricen

$$C = \begin{pmatrix} (0+2-2+0) & (0+1+0-6) & (0+3-1+4) \\ (-2-6+6+0) & (4-3+0+0) & (0-9+3+0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -5 & 6 \\ -2 & 1 & -6 \end{pmatrix},$$

sådan som vi også fandt det - men på en mindre gennemskuelig måde - i eksempel 1. I dette tilfælde er det ikke muligt at danne produktet AB, da antallet af søjler i A ikke er lig antallet af rækker i B. *

Eksempel 4

Her ser vi på matrcerne fra eksempel 2 på side 76:

$$B = \begin{pmatrix} 2 & -4 & 0 \\ 3 & 1 & -2 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -2 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Produktmaricen $C = BA$ fås så som 2×2-matricen

$$C = \begin{pmatrix} (2+0+0) & (2+8+0) \\ (3+0+2) & (3-2-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 10 \\ 5 & -5 \end{pmatrix},$$

som vi jo også fandt i eksempel 2. I dette eksempel er det muligt at danne AB, som så bliver en 3×3-matrix:

$$\begin{pmatrix} (2+3) & (-4+1) & (0-2) \\ (0-6) & (0-2) & (0+4) \\ (-2+9) & (4+3) & (0-6) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & -3 & -2 \\ -6 & -2 & 4 \\ 7 & 7 & -6 \end{pmatrix}.$$

Det fremgår, at BA og AB ikke ligner hinanden særlig meget. *

Et par observationer i tilknytning til matrixmultiplikation byder sig umiddelbart til.

B2: Hvis en vilkårlig matrix A multipliceres fra højre eller venstre med en **nulmatrix**, dvs en matrix bestående af lutter 0-er - og med et 'lovligt' antal rækker, respektive søjler - bliver resultatet en nulmatrix. Dette følger åbenbart af, at alle produktsummer der danner elementerne i produktmatricen er 0.

B3: Vi har tidligere set, at hvis en $1 \times n$-matrix ganges (fra højre) med en $n \times 1$-matrix, bliver resultatet et *tal*.

B4: Hvis en $n \times 1$-matrix A ganges (fra højre) med en $1 \times n$-matrix B bliver resultatet en $n \times n$-matrix. På den (i, j)'te plads i produktmatricen står jo den i'te række i A - der her blot består af elementet a_{i1} - ganget med den j'te søjle i B - der her blot består af elementet b_{1j} - med tallet $a_{i1}b_{1j}$ som resultat.

Én slags matricer er af stor betydning i matrixregningen. Det er de såkaldte **enhedsmatricer**. Enhver enhedsmatrix er *kvadratisk* matrix - dvs en matrix med lige mange rækker og søjler. Den n'te enhedsmatrix har 1-taller i diagonalen, altså på pladserne (i, i) med samme række- og søjlenummer, mens alle andre pladser er besat med 0-er:

$$E_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix},$$

hvor der er n rækker og søjler.

Det særlige ved enhedsmatricerne - eller, hvis det af sammenhængen klart fremgår at der kun er tale om én, så enhedsmatricen - er, at de er **neutrale** ved multiplikation fra både venstre og højre. Der vil sige, at hvis A er en vilkårlig $p \times n$-matrix er både

$$E_p A = A \quad \text{og} \quad AE_n = A.$$

Den første af disse påstande kan vi indse på følgende måde. Vi skal bestemme det (i, j)'te element i $E_p A$. Det gøres ved at multiplicere den i'te række i E_p med den j'te søjle i A, dvs

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 1 & \dots & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{pj} \end{pmatrix} = a_{ij},$$

idet 1-tallet i den i'te række i E_p står på den i'te plads. Da dette er situationen på alle pladser (i, j), stemmer $E_p A$ overens med A. På tilsvarende måde finder vi det (i, j)'te element i AE_n:

$$\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = a_{ij},$$

hvor 1-tallet i den j'te søjle af E_n står på den j'te plads. Det konkluderes altså igen, at AE_n stemmer overens med A.

For lidt siden blev det demonstreret at *matrixmultiplikation ikke er kommutativ.* Det er til gengæld det eneste der er 'galt' med matrixmultiplikation. Ellers opfører den sig pænt. Der gælder nemlig

Sætning 7.1
Matrixmultiplikationen opfylder egenskaberne (for de matricer, hvor produktet er defineret):

$$\begin{aligned} A(BC) &= (AB)C && \textit{associativitet} \\ A(B+C) &= AB + AC \quad \textit{og} \quad (F+G)H = FH + GH && \textit{distributivitet} \\ A(\lambda B) &= (\lambda A)B = \lambda AB. \end{aligned}$$

Bevis
Her skal vi huske fra indledningskapitlet, at addition af matricer af samme dimension sker pladsvis. Påstanden i sætningen godtgøres uden vanskeligheder ved udregning efter definitionen. Hvad associativiteten angår, er der tale om en besværlig udregning, som passende kan udføres som en øvelse. For i øvrigt at belyse hvad der er på færde, vil vi bevise den første distributive lov.

Lad til den ende A være en $p \times n$-matrix, mens både B og C er $n \times m$-matricer - det vigtige her er n-et. For at udregne det (i, j)'te element $A(B + C)$ skal den i'te række i A multipliceres med den j'te søjle i $B + C$:

$$\begin{aligned}
&\begin{pmatrix} a_{i1} & a_{i2} & \dots & a_{in} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{1j} + c_{1j} \\ b_{2j} + c_{2j} \\ \vdots \\ b_{nj} + c_{nj} \end{pmatrix} \\
&= a_{i1}(b_{1j} + c_{1j}) + a_{i2}(b_{2j} + c_{2j}) + \dots + a_{in}(b_{nj} + c_{nj}) \\
&= a_{i1}b_{1j} + a_{i1}c_{1j} + a_{i2}b_{2j} + a_{i2}c_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj} + a_{in}c_{nj} \\
&= (a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \dots + a_{in}b_{nj}) + (a_{i1}c_{1j} + a_{i2}c_{2j} + \dots + a_{in}c_{nj}),
\end{aligned}$$

der netop er summen af det (i, j)'te led i AB og det (i, j)'te led i AC, dvs i alt det (i, j)'te led i $AB + AC$. □

7.3 Bijektive afbildninger og invertible matricer

Vi skal se lidt nærmere på matricerne for *bijektive* lineære afbildninger. I det forrige kapitel konstaterede vi ved brug af dimensionssætningen, at hvis $F : R^n \to R^p$ er bijektiv, må $n = p$. Dvs en bijektiv afbildning er en afbildning af et talrum R^n på sig selv:

$$F : R^n \to R^n.$$

I en hvilken som helst matrixfremstilling for en bijektiv lineær afbildning, må matricen derfor være *kvadratisk*.

Nu har vi også tidligere indset, at en injektiv lineær afbildning F har en omvendt afbildning

$$F^{-1} : R^n \to R^n.$$

Denne afbildning er defineret ved at hvis $\underline{y} \in R^n$ er $F^{-1}(\underline{y})$ lig det éntydigt bestemte $\underline{x} \in R^n$, som opfylder, at $F(\underline{x}) = \underline{y}$. Nu er også F^{-1} *lineær*. Selv om det næppe er særligt overraskende, har vi faktisk ikke vist det. Det ordner vi lige i farten:

Bevis
Vi skal altså godtgøre, at hvis $\underline{y}_1$ og $\underline{y}_2$ ligger i R^n, og α_1 og α_2 er vilkårlige skalarer, er

$$F^{-1}(\alpha_1\underline{y}_1 + \alpha_2\underline{y}_2) = \alpha_1F^{-1}(\underline{y}_1) + \alpha_2F^{-1}(\underline{y}_2).$$

Ved at benytte F på begge sider af lighedstegnet, ser vi at identiteten er ensbetydende med følgende identitet

$$F(F^{-1}(\alpha_1 \underline{y}_1 + \alpha_2 \underline{y}_2)) = F(\alpha_1 F^{-1}(\underline{y}_1) + \alpha_2 F^{-1}(\underline{y}_2)).$$

Da $F \circ F^{-1} = I_3$ (den identiske afbildning i R^3) omskrives venstre side til

$$\alpha_1 \underline{y}_1 + \alpha_2 \underline{y}_2,$$

mens højresiden i kraft af F's linearitet bliver til

$$\alpha_1 F(F^{-1}(\underline{y}_1)) + \alpha_2 F(F^{-1}(\underline{y}_2)) = \alpha_1 \underline{y}_1 + \alpha_2 \underline{y}_2.$$

Da F er en bijektiv afbildning, og da højresiden og venstresiden efter brug af F tydeligvis er identiske, er også de oprindelige venstre- og højresider identiske. Således er det vist at F^{-1} er lineær. □

Eksempel 5

Hvis $F : R^3 \to R^3$ er defineret ved

$$\underline{y} = F(\underline{x}) = A\underline{x},$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix},$$

er F bijektiv, da A er kvadratisk og dens søjler lineært uafhængige - kontrollér det selv. Så bestemmes $F^{-1}(\underline{y})$, lig det $\underline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ for hvilket $\underline{y} = A\underline{x}$, som den entydigt bestemte løsning til ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Ved brug af fx rækkeoperationer på koefficientmatricen finder vi, at

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Altså er

$$F^{-1}(\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}) = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Vi slutter eksemplet med at multiplicere matricen for F og matricen for F^{-1} både fra højre og venstre:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \\ -3 & -6 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

At dette resultat ikke er nogen tilfældighed vil blive åbenbaret nedenfor. *

Vi vil nu studere *situationen i almindelighed.*

Først minder vi om, at hvis $F : R^n \to R^n$ er *injektiv*, så er den også *bijektiv.* Da $dimB(F) = n - dimN(F) = n$ (fordi F er injektiv) bliver F surjektiv.

Hvis derfor $F : R^n \to R^n$ er injektiv eksisterer også $F^{-1} : R^n \to R^n$. Den er i følge det foregående lineær, hvorfor den har en matrixfremstilling i forhold til en given basis i R^n. Har F i denne basis matricen A kan vi kalde matricen for F^{-1} for B. Hvad kan vi nu sige om B?

Jo, matricen for $F^{-1} \circ F$ er efter det forrige afsnit lig BA. På den anden side er $F^{-1} \circ F = I_n$, hvor I_n er den **identiske afbildning** af R^n ind i sig selv, der lader alle vektorer uberørt:

$$I_n(\underline{x}) = \underline{x}.$$

Den identiske afbildning har åbenbart i enhver basis enhedmatricen E_n som matrix. Når derfor $F^{-1} \circ F = I_n$ er $BA = E_n$.

Nu gælder der imidlertid også, at $F \circ F^{-1} = I_n$. Eftersom matricen for $F \circ F^{-1}$ er AB, må der derfor også gælde at $AB = E_n$.

Summa Summarum har vi om matricen B for F^{-1}, at

$$AB = BA = E_n.$$

Det vil sige, at B er sådan en slags reciprok til A. Derfor - og insiperet af at B er matricen for F^{-1} - betegnes B med

$$B = A^{-1},$$

og kaldes den **inverse matrix** - somme tider også den *omvendte* - til A. Da F og F^{-1} er hinandens omvendte afbildninger, må vi tillige have

$$A = B^{-1} = (A^{-1})^{-1}.$$

Vi har altså indset følgende:

Hvis A er en $n \times n$-matrix for en *injektiv* - dermed her en *bijektiv* - afbildning $F : R^n \to R^n$, findes en invers matrix A^{-1} til A. Vi siger at A er **invertibel**. Den inverse matrix A^{-1} er matrix for F^{-1}, den omvendte afbildning til F.

Er omvendt A en $n \times n$-matrix for hvilken der findes en $n \times n$-matrix B, så at

$$AB = BA = E_n,$$

er A matrix for en lineær afbildning $F : R^n \to R^n$ defineret ved $F(\underline{x}) = A\underline{x}$. Denne afbildning F er faktisk injektiv. For hvis $F(\underline{x}) = F(\underline{x'})$, er $A\underline{x} = A\underline{x'}$, og heraf får vi:

$$\begin{aligned} \underline{x} = E_n\underline{x} = (BA)\underline{x} = B(A\underline{x}) = \\ B(A\underline{x'}) = (BA)\underline{x'} = E_n\underline{x'} = \underline{x'}, \end{aligned}$$

hvilket viser, at $\underline{x} = \underline{x'}$. F er altså injektiv (dvs bijektiv). Så findes A^{-1}, der jo også opfylder

$$AA^{-1} = A^{-1}A = E_n,$$

Nu må altså $B = A^{-1}$, da

$$B = BE_n = B(AA^{-1}) = (BA)A^{-1} = E_nA^{-1} = A^{-1}.$$

Konklusionen på disse betragtninger er, at hvis der til $n \times n$-matricen A findes en $n \times n$-matrix B, så at

$$AB = BA = E_n,$$

er A invertibel og $A^{-1} = B$.

A er matrix for en injektiv (bijektiv) afbildning præcis hvis alle søjlerne i A er lineært uafhængige - dimensionssætningen nok engang. Eftersom A er kvadratisk er dette ensbetydende med at også rækkerne er lineært uafhængige.

Nu har vi sparet sammen til en sætning:

Sætning 7.2
For en $n \times n$-matrix A er følgende udsagn ensbetydende:
(1) A er invertibel, dvs matrix for en injektiv afbildning $F : R^n \to R^n$
(2) Der findes netop én matrix B så $AB = BA = E_n$
(Denne matrix er $B = A^{-1}$, matricen for F's omvendte afbildning F^{-1})
(3) Søjlerne i A er lineært uafhængige
(4) Rækkerne i A er lineært uafhængige

Eksempel 6

Matricen

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

er invertibel, da søjlerne er lineært uafhængige - godtgør det selv! Dens inverse er

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 5 & -2 & 2 & -1 \\ -9 & \frac{7}{2} & -3 & 2 \\ \frac{9}{2} & -\frac{3}{2} & \frac{3}{2} & -1 \\ -3 & 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Kontrollér selv denne påstand ved udregning. *

B5: Ovenfor så vi, at $(A^{-1})^{-1} = A$. En anden observation er, at

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

Der gælder nemlig

$$\begin{aligned}(AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A[B(B^{-1}A^{-1})] = A[(BB^{-1})A^{-1}] \\ &= A[E_nA^{-1}] = AA^{-1} = E_n\end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned}(B^{-1}A^{-1})(AB) &= [(B^{-1}A^{-1})A]B = [B^{-1}(A^{-1}A)]B \\ &= [B^{-1}E_n]B = B^{-1}B = E_n,\end{aligned}$$

altså til sammen

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = (B^{-1}A^{-1})(AB) = E_n.$$

Dette viser, at $(B^{-1}A^{-1})$ er AB's inverse.

De kriterier for invertibilitet af en matrix som er indeholdt i sætning 7.2 ovenfor er aldeles udmærkede, men de er ikke særligt *operationelle*, sådan at forstå at der ikke uden videre er nogen automatisk metode til at afgøre om de er opfyldt. I betragtning af at invertibilitet er en så vigtig egenskab ved matricer for både teoretiske og praktiske formål, er der behov for et mere operationelt kriterium. Derom handler næste kapitel.

8 Determinanter

Et kriterium af den art vi efterspørger har at gøre med begrebet *determinant.* Enhver *kvadratisk* matrix får (om lidt, hav venligst tålmodighed) knyttet et reelt tal - matricens determinant - til sig. Dette tal er en karakteristisk størrelse for matricen på samme måde som vægten af en person er karakteristisk for personen. Determinanten fortæller en del vigtige ting om 'sin' matrix, bla om den er invertibel eller ej. Lidt senere skal vi også bruge den til andre formål.

Teorien for determinanter er omfattende og indviklet. Det er derfor kun muligt at behandle dem nødtørftigt her.

Først tager vi et meget lille skridt: Vi definerer determinanten af en 1×1-matrix (a). Determinanten skal simpelhen være tallet i matricen selv:

$$det(a) = a.$$

Dernæst indfører vi determinanter for 2×2-matricer. Hvis A er en 2×2-matrix:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix},$$

sættes

$$detA = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}.$$

Udtrykket virker måske bekendt for nogen af jer, enten fra tidligere beskæftiglse med 2×2-matricer, eller fra løsning af to ligninger med to ubekendte.

Nu tager vi lige en elevatortur. Vi tænker os, at vi allerede har tillagt alle $(n-1)\times(n-1)$-matricer en determinant - én hver, altså. Så vil vi definere determinanten af en vilkårlig $n \times n$-matrix. Lad os nu betragte en sådan

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Nu tager vi fat i den første søjle i A. Forestiller vi os dannet en matrix af A ved at slette den første række og den første søjle i A, har vi nu fået en $(n-1) \times (n-1)$-matrix. Den betegnes A_{11} og kaldes *komplementet* til elementet a_{11} i A. Som $(n-1) \times (n-1)$-matrix har den - efter forudsætningen - en determinant.

Dernæst går vi til den næste plads (2,1) i den første søjle. Igen sletter vi den pågældende række - her den anden - og søjlen fra A. Herved opstår en ny $(n-1)\times(n-1)$-matrix, A_{21}, komplementet til a_{21}. Også A_{21} har en determinant.

Således fortsættes ned gennem første søjle for A. Derved har vi høstet i alt n stykker $(n-1)\times(n-1)$-matricer - $A_{11}, A_{21}, \ldots, A_{n1}$ - der alle har en determinant. Nu er vi klar til at definere determinanten for A, men inden vil jeg give en advarsel: Prøv ikke at forstå, hvorfor i alverden definitionen ser sådan ud. Det er ikke muligt på det grundlag vi kan skabe i dette kursus. Tag den i stedet til efterretning, og lær at omgås den gennem eksempler. Så skal definitionen ikke udsættes længere:

$$detA = (-1)^{1+1}a_{11}detA_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}detA_{21} + \ldots + (-1)^{n+1}a_{n1}detA_{n1}.$$

Det er påkrævet straks at prøve definitionen af på konkrete eksempler. Allerførst er der grund til at undersøge om det passer for 2×2-matricer, dvs om den måde at danne determinanten af en 2×2-matrix på, ud fra determinanten af en 1×1-matricer, stemmer overens med den tidligere definition. Til den ende betragtes igen

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}.$$

Vi skal opsøge den første søjle og dens komplementer. Komplementet til a_{11} fås ved at slette den første række og den første søjle i A. Derved bliver $A_{11} = (a_{22})$, hvis determinant er a_{22}. Komplementet til a_{21} er $A_{21} = (a_{12})$, hvis determinant er a_{12}. Efter den generelle definition får vi

$$detA = (-1)^{1+1}a_{11}detA_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}detA_{21} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}.$$

Minsandten! Det blev det rigtige.

Når vi har defineret determinanten af en 2×2-matrix, kan vi definere determinanten af enhver 3×3-matrix ved at benytte den generelle 'motor'. Vi ser på en vilkårlig 3×3-matrix

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Igen går vi til den første søjle i A og opsøger komplementerne. Komplementet til a_{11} er 2×2-matricen

$$A_{11} = \begin{pmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

På tilsvarende måde finder vi komplementerne til a_{21} og a_{31}:

$$A_{21} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A_{31} = \begin{pmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}.$$

Det er ingredienserne i $detA$:

$$\begin{aligned} detA &= (-1)^{1+1}a_{11}detA_{11} + (-1)^{2+1}a_{21}detA_{21} + (-1)^{3+1}a_{31}detA_{31} \\ &= a_{11}(a_{22}a_{33} - a_{32}a_{23}) - a_{21}(a_{12}a_{33} - a_{32}a_{13}) + a_{31}(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}). \end{aligned}$$

Ved at omordne efter fortegn mv bliver resultatet

$$detA = (a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{21}a_{32}a_{13}) - (a_{13}a_{22}a_{31} + a_{12}a_{21}a_{33} + a_{23}a_{32}a_{11}).$$

Denne opskrivningsrækkefølge er valgt fordi det gør det muligt at visualisere beregningerne. De positive led i determinanten er de tre 'højreskrå' produkter af elementerne i A, mens de negative led er de tre 'venstreskrå':

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Nu har vi defineret determinanten af alle 3×3-matricer. Derefter kan vi roligt gå videre til 4×4-matricer ... Nej, I skal nok blive skånet for det generelle. Et eksempel må række.

Eksempel 1

Matricen fra eksempel 6 på side 87 så sådan ud

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Dens determinant bestemmes ved

$$\begin{aligned} detA &= (-1)^{1+1}(-1)detA_{11} + (-1)^{2+1}0detA_{21} + (-1)^{3+1}3detA_{31} + (-1)^{4+1}0detA_{41} \\ &= -detA_{11} + 3detA_{31}, \end{aligned}$$

hvor

$$A_{11} = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A_{31} = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Heraf finder vi

$$detA_{11} = (2\cdot0\cdot3+4\cdot(-1)\cdot0+0\cdot2\cdot2)-(0\cdot0\cdot0+4\cdot2\cdot3+2\cdot(-1)\cdot2) = -(24-4) = -20$$

og

$$detA_{31} = (0\cdot4\cdot3+2\cdot0\cdot0+1\cdot2\cdot2)-(1\cdot4\cdot0+2\cdot2\cdot3+0\cdot2\cdot0) = 4-12 = -8,$$

som ved indsættelse giver

$$detA = -(-20) + 3(-8) = -4 \ *$$

På denne måde kan man altså **rekursivt**, som det hedder, tillægge enhver kvadratisk matrix en determinant ved at bygge på determinanter for matricer ét nummer mindre.

Den ovenstående definition af determinanter tog udgangspunkt i den første søjle, et for så vidt vilkårligt valg. Imidlertid gælder det - men det må vi afstå fra at bevise - at vi lige så godt kunne have benyttet en hvilken som helst anden søjle, *resultatet var blevet det samme*. Generelt betegner vi med A_{ij} den $(n-1) \times (n-1)$-matrix der fremkommer af A, hvis vi sletter den i'te række og den j'te søjle - den kaldes naturligt nok **komplementet** til elementet a_{ij}. Så får vi ved at tage udgangspunkt i den k'te søjle, hvor k kan være ethvert af tallene $1, 2, \ldots, n$, at

$$detA = (-1)^{1+k} a_{1k} detA_{1k} + (-1)^{2+k} a_{2k} detA_{2k} + \ldots + (-1)^{n+k} a_{nk} detA_{nk}.$$

Man siger at determinanten er beregnet ved **udvikling** efter den k'te søjle.

Vi kunne lige så godt have benyttet os af en vilkårlig *række*. Der gælder nemlig også for den k'te række, at

$$detA = (-1)^{k+1} a_{k1} detA_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k2} detA_{k2} + \ldots + (-1)^{k+n} a_{kn} detA_{kn}.$$

Man siger analogt, at determinanten er beregnet ved udvikling efter den k'te række.

Når det gælder beregning af determinanten for en konkret matrix, er det bekvemt at have frihed i valget af beregningsudgangspunktet som fremgår af de to sidste resultater. Regningerne kan blive lettest hvis vi vælger en række/søjle med mange 0'er.

En væsentlig motivation for overhovedet at interessere os (moderat) for determinanter, var deres evne til at karakterisere de invertible matricer. Det kommer til udtryk i følgende sætning, som vi dog ikke vil give noget bevis for.

Sætning 8.1
En kvadratisk matrix A er invertibel hvis og kun hvis dens determinant er forskellig fra 0, dvs $detA \neq 0$.

Kapitlet vil vi afslutte med en række nyttige småsætninger om determinanter samt endnu et par eksempler på beregning af determinanter.

S1: Hvis én af rækkerne eller én af søjlerne i A består af lutter 0'er, er $detA = 0$. Det følger umiddelbart ved udvikling efter den pågældende række/søjle.

S2: Hvis A og B er $n \times n$-matricer gælder $det(AB) = detA \cdot detB$. Dette bevises ikke.

S3: Med A^T betegnes den **transponerede** for matricen A, dvs den matrix der fremgår af A ved at opskrive dens søjler som rækker - elementet b_{ij} på plads (i, j) i A^T er givet ved a_{ji}. Hvis A er kvadratisk er også A^T kvadratisk:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad A^T = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

Der gælder nu, at $detA^T = detA$. Heller ikke dette vil vi bevise.

S4: Hvis A er en **øvre trekantsmatrix**, dvs hvis A har lutter 0'er under diagonalen:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{nn} \end{pmatrix},$$

kan determinanten beregnes på en meget simpel måde, da den blot består af produktet af diagonalelementerne:

$$detA = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}.$$

Dette følger let af definitionen. Udvikler vi nemlig efter første søjle, er der kun ét led $a_{11}detA_{11}$ - alle øvrige led bliver 0. Imidlertid er også A_{11} en øvre trekantsmatrix. Udvikler vi nu den efter dens første søjle, får vi dens determinant til at være a_{22} multipliceret med determinanten af den matrix der fremgår af A ved at slette dens to første søjler og dens to første rækker. Det er på ny en øvre trekantsmatrix, hvor der i øverste venstre hjørne står a_{33}. På denne måde gnaver vi os ned gennem A, indtil vi har konsummeret den sidste bid, determinanten til (a_{nn}), altså tallet a_{nn}.

S5: Hvis A er en **nedre trekantsmatrix**, dvs hvis A har lutter 0'er over diagonalen, er dens determinant igen lig med produktet af diagonalelementerne. Det kan indses enten ved at ræsonnere helt magen til det foregående, eller ved at lægge mærke til at A^T er en øvre trekantsmatrix, netop når A er en nedre trekantsmatrix, og udnytte at $detA^T = detA$.

S6: Enhedsmatricen E_n er både en øvre og en nedre trekantsmatrix. Dens determinant er derfor produktet af diagonalelementerne, altså 1, dvs $detE_n = 1$.

S7: I kapitel 2 om lineære ligningssystemer optræder tre typer *rækkeoperationer* som vi benyttede i *Gauss-elimination* af lineære ligningssystemer eller deres koefficientmatricer. Lad os lige repetere de tre typer:

En *rækkeoperation* består i at en given ligning/række:

(1) bytter plads med en anden ligning/række

(2) erstattes af sig selv ganget med en skalar $\neq 0$

(3) erstattes af sig selv plus en anden ligning/række ganget med en skalar.

Hvis A er en kvadratisk matrix, vi vil udsætte for Gauss-elimination, kan vi undersøge, hvordan de tre typer rækkeoperationer påvirker matricens determinant. Svaret på dette spørgsmål er ganske enkelt - men mere kompliceret at bevise, så det undlader vi:

(1) bytter to naborækker plads i A, vil $detA$ *skifte fortegn.*

(2) multipliceres en række i A med $k \neq 0$, vil $detA$ *blive multipliceret med* k.

(3) adderes et multiplum af én række i A til en anden vil $detA$ *ikke blive ændret.*

Da $detA^T = detA$ kan vi ydermere se, at der vil gælde de samme regneregler for $detA$, hvis vi udfører søjleoperationer på matricen A. **Obs.** Dette gælder *kun* for determinanter!

Eksempel 1 (fortsat)

Benytter vi disse regneregler for rækkeoperationer på matricen A i eksempel 1, bliver:

$$detA = det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 6 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$= det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 3 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = -4,$$

hvor vi i hvert trin kun har benyttet regel (3). Først $r3 \mapsto r3+3\cdot r1$, dernæst $r3 \mapsto r3-r2$ og til slut $r4 \mapsto r4 - r3$. Nu er matricen blevet en øvre trekantsmatrix, som vi kender determinanten af. *

Eksempel 2

I eksempel 5 på side 85 påstulerede vi at søjlerne i matricen

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix}$$

var lineært uafhængige og A derfor invertibel. Det kan vi jo nu også vise ved at se om $detA \neq 0$. Udvikles determinanten fx efter første række bliver

$$detA = 2\cdot(1\cdot 2 - 3\cdot 0) - 0\cdot((-1)\cdot 2 - 0\cdot 0) + 1\cdot((-1)\cdot 3 - 0\cdot 1) = 4 - 3 = 1 \neq 0$$

Bruger vi rækkeoperationer, bliver beregningerne

$$detA = det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 3 & 2 \end{pmatrix} = det\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{pmatrix} = 1 \neq 0.$$

Først bliver $r2 \mapsto r2 + \frac{1}{2}\cdot r1$ og så $r3 \mapsto r3 - 3\cdot r2$. Begge beregninger bekræfter, at A er invertibel. *

9 Basisskift

Flere gange i det foregående har vi strejfet det forhold at en lineær afbildning har forskellige matrixfremstillinger i forskellige baser. I dette kapitel vil vi foretage en systematisk undersøgelse af spørgsmålet. Vores interesse for sagen skyldes, at der i forbindelse med en lineære afbildning ofte er 'naturlige' baser som er forskellige fra baserne bestående af grundvektorerne. For at få en fornemmelse af hvad der er på færde lægger vi ud med et eksempel, før vi går til den generelle situation.

Eksempel 1

I R^2 forestiller vi os givet basen $\underline{b}_1 = (1, 2)$, $\underline{b}_2 = (-1, 1)$, og i R^3 basen $\underline{c}_1 = (2, 0, -1)$, $\underline{c}_2 = (1, 1, 1)$, $\underline{c}_3 = (0, -2, 2)$ - I må selv ckecke om der virkelig er tale om baser i de to rum. En lineær afbildning $F : R^2 \to R^3$ er givet ved dens billeder af den valgte basis i R^2:

$$F(\underline{b}_1) = 3\underline{c}_1 + 2\underline{c}_3, \qquad F(\underline{b}_2) = -\underline{c}_1 + 2\underline{c}_2 - 3\underline{c}_3.$$

Det betyder at F's matrixfremstilleng i disse baser er

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3 \end{pmatrix} \underline{\xi},$$

hvor $\underline{\xi}$ er $\underline{x}$'s koordinater i $\underline{b}$-basen for R^2, mens $\underline{\tau}$ er billedvektorens - $F(\underline{x})$'s - koordinater i $\underline{c}$-basen i R^3. Så vidt så godt.

Nu skifter vi baser i både R^2 og R^3. Vi forestiller os at vi går over til den nye basis $\underline{b}'_1 = (2, 0)$, $\underline{b}'_2 = (-3, 2)$ i R^2, mens vi skifter til basen $\underline{c}'_1 = (1, 2, 0)$, $\underline{c}'_2 = (3, 0, 1)$, $\underline{c}'_3 = (0, 0, -2)$ i R^3.

For at undersøge hvordan basisskiftet foregår i hvert af de to rum ser vi først på R^2. Med $\underline{x}$ betegnes en vilkårlig vektor i R^2. I den oprindelige basis har den koordinaterne (ξ_1, ξ_2):

$$\underline{x} = \xi_1 \underline{b}_1 + \xi_2 \underline{b}_2,$$

mens den i den nye basis har koordinatrene (ξ'_1, ξ'_2):

$$\underline{x} = \xi'_1 \underline{b}'_1 + \xi'_2 \underline{b}'_2.$$

Hvordan hænger nu ξ-erne og ξ'-erne sammen? Ja, det kan vi besvare ved at udnytte, at de nye basisvektorer kan fremstilles i den gamle basis som:

$$\underline{b}_1' = \frac{2}{3}\underline{b}_1 - \frac{4}{3}\underline{b}_2, \quad \text{og} \quad \underline{b}_2' = -\frac{1}{3}\underline{b}_1 + \frac{8}{3}\underline{b}_2.$$

[Obs! Koefficienterne heri findes ved at løse ligningerne

$$\underline{b}_1' = \alpha_1\underline{b}_1 + \beta_1\underline{b}_2, \quad \text{og} \quad \underline{b}_2' = \alpha_2\underline{b}_1 + \beta_2\underline{b}_2.$$

eller med vektorernes koordinater (i grundvektorbasen!!) indsat

$$(2,0) = \alpha_1(1,2) + \beta_1(-1,1), \quad \text{og} \quad (-3,2) = \alpha_2(1,2) + \beta_2(-1,1).$$

i $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ og β_2.] Vi indsætter det nu i fremstillingen af $\underline{x}$ i $\underline{b}'$-basen, hvor vi får

$$\underline{x} = \xi_1'(\frac{2}{3}\underline{b}_1 - \frac{4}{3}\underline{b}_2) + \xi_2'(-\frac{1}{3}\underline{b}_1 + \frac{8}{3}\underline{b}_2) = (\frac{2}{3}\xi_1' - \frac{1}{3}\xi_2')\underline{b}_1 + (-\frac{4}{3}\xi_1' + \frac{8}{3}\xi_2')\underline{b}_2.$$

Dette er nu en fremstilling af $\underline{x}$ i $\underline{b}$-basen. Sammenholdes den med den oprindelige fremstilling af $\underline{x}$ i denne basis, må der gælde - da der kun findes én sådan fremstilling - at

$$\xi_1 = \frac{2}{3}\xi_1' - \frac{1}{3}\xi_2', \qquad \xi_2 = -\frac{4}{3}\xi_1' + \frac{8}{3}\xi_2',$$

eller på matrixform

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix},$$

hvor S blot er en kort betegelse for matricen. Bogstavet S står for 'skift'. Denne matrix, der er invertibel - dens determinant er $\frac{4}{3} \neq 0$ - angiver hvordan overgangen til en ny basis forplanter sig til et skift i koordinater for en given vektor:

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix}.$$

I matrixligningen udtrykkes de *gamle* koordinater ved hjælp af de *nye*. Da nu S er invertibel kan de nye koordinater lige så godt udtrykkes ved hjælp af de gamle:

$$\begin{pmatrix} \xi_1' \\ \xi_2' \end{pmatrix} = S^{-1} \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix}.$$

Derefter går vi frem på helt analog måde i R^3. Vi ser på $\underline{y}$, en helt tilfældig vektor i R^3, med koordinaterne (τ_1, τ_2, τ_3) i den gamle basis, $\underline{c}$-basen, og med koordinaterne $(\tau_1', \tau_2', \tau_3')$ i den nye basis, $\underline{c}'$-basen:

$$\underline{y} = \tau_1\underline{c}_1 + \tau_2\underline{c}_2 + \tau_3\underline{c}_3, \quad \text{og} \quad \underline{y} = \tau_1'\underline{c}_1' + \tau_2'\underline{c}_2' + \tau_3'\underline{c}_3'.$$

Eftersom

$$\underline{c}_1' = 0\underline{c}_1 + 1\underline{c}_2 - \frac{1}{2}\underline{c}_3, \quad \underline{c}_2' = 1\underline{c}_1 + 1\underline{c}_2 + \frac{1}{2}\underline{c}_3, \quad \underline{c}_3' = \frac{2}{5}\underline{c}_1 - \frac{4}{5}\underline{c}_2 - \frac{2}{5}\underline{c}_3,$$

[Prøv igen selv på samme måde som før!], bliver

$$\begin{aligned} \underline{y} &= \tau_1'(0\underline{c}_1 + 1\underline{c}_2 - \frac{1}{2}\underline{c}_3) + \tau_2'(1\underline{c}_1 + 1\underline{c}_2 + \frac{1}{2}\underline{c}_3) + \tau_3'(\frac{2}{5}\underline{c}_1 - \frac{4}{5}\underline{c}_2 - \frac{2}{5}\underline{c}_3) \\ &= (0\tau_1' + 1\tau_2' + \frac{2}{5}\tau_3')\underline{c}_1 + (1\tau_1' + 1\tau_2' - \frac{4}{5}\tau_3')\underline{c}_2 + (-\frac{1}{2}\tau_1' + \frac{1}{2}\tau_2' - \frac{2}{5}\tau_3')\underline{c}_3. \end{aligned}$$

Ved at sammenholde dette med $\underline{y}$'s oprindelige fremstilling i $\underline{c}$-basen finder vi

$$\begin{pmatrix}\tau_1\\ \tau_2\\ \tau_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \frac{2}{5} \\ 1 & 1 & -\frac{4}{5} \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{2}{5}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\tau_1'\\ \tau_2'\\ \tau_3'\end{pmatrix} = T\begin{pmatrix}\tau_1'\\ \tau_2'\\ \tau_3'\end{pmatrix}.$$

Igen var resultatet af anstrengelserne en oversættelse af basisskiftet i R^3 til en angivelse af, at de *gamle* koordinater er lig T gange de *nye* koordinater - altså en sammenhæng af samme art som i R^2. Atter er koordinatskiftematricen - her T - *invertibel*, da dens determinant er $\frac{6}{5} \neq 0$. De nye koordinater udtrykt ved de gamle er $\underline{\tau}' = T^{-1}\underline{\tau}$.

Ved hjælp af koordinatskiftematricerne i de to rum kan vi nu angive F's matrixfremstilling i de nye baser. Vi havde jo i de oprindelige baser

$$\underline{\tau} = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3\end{pmatrix}\underline{\xi}.$$

Her skal vi blot indsætte

$$\underline{\tau} = T\underline{\tau}' \quad \text{og} \quad \underline{\xi} = S\underline{\xi}',$$

hvilket giver

$$T\underline{\tau}' = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3\end{pmatrix} S\underline{\xi}'.$$

Multipliceres denne identitet på begge sider fra venstre med T^{-1}, fremkommer F's matrix-fremstilling i de nye baser:

$$\underline{\tau}' = T^{-1}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3\end{pmatrix} S\underline{\xi}',$$

der ved indsættelse af T^{-1} og S giver

$$\begin{aligned}\underline{\tau}' &= \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & -1 \\ \frac{2}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\ \frac{5}{6} & -\frac{5}{12} & -\frac{5}{6}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 2 \\ 2 & -3\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \frac{2}{3} & -\frac{1}{3} \\ -\frac{4}{3} & \frac{8}{3}\end{pmatrix}\underline{\xi}' \\ &= \begin{pmatrix} -\frac{20}{3} & \frac{34}{3} \\ \frac{32}{9} & -\frac{40}{9} \\ -\frac{5}{9} & \frac{35}{18}\end{pmatrix}\underline{\xi}'.*\end{aligned}$$

I virkeligheden er det mere besværligt at gennemføre betragtningerne som dem i eksemplet med konkrete tal - I skal ikke tro at det har været morsomme udregninger - fordi de bærende ideer camoufleres af talgymnastikken. Om lidt skal I se, hvordan man griber sagen an i den generelle situation, men lad os lige lidt skematisk (figur 9.1) se hvad vi har gjort i eksemplet.

Øverst på figuren er afbildningen F repræsenteret ved sin matrix A i forhold til de to *gamle* baser - $\underline{b}$- og $\underline{c}$-baserne, mens F nederste er repræsenteret ved sin matrix A' i

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\xi} \in \mathbf{R}^2_{b} \arrow[rr, "F", "A"'] & & \mathbf{R}^3_{c} \ni \underline{\tau} \\
\\
\underline{\xi}' \in \mathbf{R}^2_{b'} \arrow[uu, "S"'] \arrow[rr, "A'", "F"'] & & \mathbf{R}^3_{c'} \ni \underline{\tau}' \arrow[uu, "T"]
\end{tikzcd}
$$

Figur 9.1 En skematisk afbildning.

forhold til de to *nye* baser - $\underline{b}'$- og $\underline{c}'$-baserne. Vi har i regnerierne fastlagt basisskiftematricerne S og T, der afbilder henholdsvis $\underline{\xi}'$ på $\underline{\xi}$ og $\underline{\tau}'$ på $\underline{\tau}$. Af skemaet kan vi så aflæse, at man kan komme fra $\underline{\xi}' \in R^2_{b'}$ til $\underline{\tau}' \in R^3_{c'}$ på to forskellelige måder - enten med A' eller med $T^{-1}AS$. Dette skema vil vi komme tilbage til senere, men nu til den generelle situation.

Lad os gå ud fra at der i R^n er givet en basis $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$. Den kalder vi den 'gamle' basis, og enhver vektor $\underline{x} \in R^n$ har en entydigt bestemt koordinatfremstilling i denne basis:

$$\underline{x} = \xi_1 \underline{b}_1 + \xi_2 \underline{b}_2 + \ldots + \xi_n \underline{b}_n.$$

Derefter forestiller vi os indført en 'ny' basis i R^n - $\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \ldots, \underline{b}'_n$, og i forhold til denne har $\underline{x}$ koordinatfremstillingen

$$\underline{x} = \xi'_1 \underline{b}'_1 + \xi'_2 \underline{b}'_2 + \ldots + \xi'_n \underline{b}'_n.$$

De nye basisvektorer er alle linearkombination af de gamle:

$$
\begin{aligned}
\underline{b}'_1 &= s_{11}\underline{b}_1 + s_{21}\underline{b}_2 + \ldots + s_{n1}\underline{b}_n, \\
\underline{b}'_2 &= s_{12}\underline{b}_1 + s_{22}\underline{b}_2 + \ldots + s_{n2}\underline{b}_n, \\
&\vdots \\
\underline{b}'_n &= s_{1n}\underline{b}_1 + s_{2n}\underline{b}_2 + \ldots + s_{nn}\underline{b}_n.
\end{aligned}
$$

De indsættes nu i $\underline{x}$'s $\underline{b}'$-fremstilling:

$$
\begin{aligned}
\underline{x} = {} & \xi'_1(s_{11}\underline{b}_1 + s_{21}\underline{b}_2 + \ldots + s_{n1}\underline{b}_n) \\
& + \xi'_2(s_{12}\underline{b}_1 + s_{22}\underline{b}_2 + \ldots + s_{n2}\underline{b}_n) \\
& \vdots \\
& + \xi'_n(s_{1n}\underline{b}_1 + s_{2n}\underline{b}_2 + \ldots + s_{nn}\underline{b}_n),
\end{aligned}
$$

som ved omordning efter $\underline{b}$-erne bliver til

$$\begin{aligned}\underline{x} = &(s_{11}\xi_1' + s_{12}\xi_2' + \ldots + s_{1n}\xi_n')\underline{b}_1 \\ &+ (s_{21}\xi_1' + s_{22}\xi_2' + \ldots + s_{2n}\xi_n')\underline{b}_2 \\ &\vdots \\ &+ (s_{n1}\xi_1' + s_{n2}\xi_2' + \ldots + s_{nn}\xi_n')\underline{b}_n.\end{aligned}$$

Sammenholdes dette med $\underline{x}$'s oprindelige fremstilling i $\underline{b}$-basen, kan vi slutte at

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \vdots\\ \xi_n\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11}\xi_1' + s_{12}\xi_2' + \ldots + s_{1n}\xi_n' \\ s_{21}\xi_1' + s_{22}\xi_2' + \ldots + s_{2n}\xi_n' \\ \vdots \\ s_{n1}\xi_1' + s_{n2}\xi_2' + \ldots + s_{nn}\xi_n'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_{11} & s_{12} & \ldots & s_{1n} \\ s_{21} & s_{22} & \ldots & s_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s_{n1} & s_{n2} & \ldots & s_{nn}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\xi_1'\\ \xi_2'\\ \vdots\\ \xi_n'\end{pmatrix}.$$

Hermed har vi opnået at forbinde de *gamle* og *nye* koordinater i R^n ved hjælp af **koordinatskiftematricen** S:

$$\underline{\xi} = S\underline{\xi}'.$$

Matricen S er matrix for en lineær afbildning af R^n ind i sig selv. Sådan som S er dannet består *den j'te søjle i S af koordinaterne til den j'te 'nye' basisvektor* - $\underline{b}_j'$ - *udtryk i den 'gamle' basis.* Det betyder, at S er matricen for den lineære afbildning af R^n ind i sig selv - forsynet med den oprindelige basis - der afbilder den gamle basis på den nye.

Matricen er *invertibel.* Er $A\underline{\xi}' = \underline{0}$, er $\underline{\xi} = \underline{0}$, dvs koordinaterne i $\underline{b}$-basen for $\underline{0}$. Sættet $\underline{\xi}'$ er så koordinaterne for $\underline{0}$ i den nye basis, men da nulvektoren har de samme koordinater i alle baser, er $\underline{\xi}' = \underline{0}$. Dette viser, at S er matrix for en injektiv afbildning af R^n ind i sig selv. Denne afbildning er så bijektiv, og dermed er S invertibel. *Ethvert basisskift er altså en bijektiv lineær afbildning af talrummet ind i sig selv.* Denne afbildning er faktisk den **identiske** afbildning I_n som afbilder ethvert punkt $\underline{x}$ i R^n på sig selv, dvs

$$I_n(\underline{x}) = \underline{x} \quad \text{for alle} \quad \underline{x} \in R^n.$$

$\underline{x}$ er blot repræsenteret ved to forskellige koordinatsæt - ét i hver af baserne - når vi opskriver den til afbildningen svarende matrixligning - $\underline{\xi} = S\underline{\xi}'$.

Enhver invertibel $n\times n$-matrix S er matrix for et basisskifte i R^n. Hvis nemlig $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$ er en given basis for R^n, beskriver søjlerne i S koordinaterne i denne basis for n vektorer $\underline{b}_1', \underline{b}_2', \ldots, \underline{b}_n'$. At disse vektorer er lineært uafhængige - og dermed en basis for R^n - se således. Er nemlig

$$\begin{aligned}\underline{0} = &\alpha_1\underline{b}_1' + \alpha_2\underline{b}_2' + \ldots + \alpha_n\underline{b}_n' \\ &= \alpha_1(s_{11}\underline{b}_1 + s_{21}\underline{b}_2 + \ldots + s_{n1}\underline{b}_n) \\ &+ \alpha_2(s_{12}\underline{b}_1 + s_{22}\underline{b}_2 + \ldots + s_{n2}\underline{b}_n) \\ &\vdots \\ &+ \alpha_n(s_{1n}\underline{b}_1 + s_{2n}\underline{b}_2 + \ldots + s_{nn}\underline{b}_n),\end{aligned}$$

der ved omordning after $\underline{b}$-erne giver

$$\begin{aligned}\underline{0} = &(s_{11}\alpha_1 + s_{12}\alpha_2 + \ldots + s_{1n}\alpha_n)\underline{b}_1 \\ &+ (s_{21}\alpha_1 + s_{22}\alpha_2 + \ldots + s_{2n}\alpha_n)\underline{b}_2 \\ &\vdots \\ &+ (s_{n1}\alpha_1 + s_{n2}\alpha_2 + \ldots + s_{nn}\alpha_n)\underline{b}_n.\end{aligned}$$

Dette viser, at

$$\underline{0} = S\underline{\alpha},$$

og da søjlerne i S er lineært uafhængige fordi S er forudsat invertibel, må samtlige α-er være 0. Dette viser, at $\underline{b}'$-erne er lineært uafhængige.

Ud fra ræsonnementerne ovenfor kan vi altså konkludere, at *de $n \times n$-matricer S der beskriver et basisskift i R^n er netop de invertible matricer.*

Nu kan vi undersøge hvad der sker med en lineær afbildnings matrixfremstilling, hvis der skiftes baser i begge de to rum den arbejder mellem.

Vi forestiller os givet $F : R^n \to R^p$, hvor R^n og R^p er forsynet med givne baser. I forhold til disse baser har F en matrixfremstilling bestemt ved $p \times n$-matricen A:

$$\underline{\tau} = A\underline{\xi}.$$

Nu skiftes baser i både R^n og R^p. Overgangen til den nye basis i R^n er beskrevet ved $\underline{\xi} = S\underline{\xi}'$, hvor som før $\underline{\xi}'$ er koordinaterne i den nye basis. På tilsvarende måde er overgangen i R^p til den nye basis beskrevet ved $\underline{\tau} = T\underline{\tau}'$. Matrixfremstillingen for F i de nye baser fremkommer så ved i den oprindelige fremstilling at indsætte $\underline{\tau}$ udtrykt ved $\underline{\tau}'$, og $\underline{\xi}$ ved $\underline{\xi}'$, dvs

$$T\underline{\tau}' = AS\underline{\xi}',$$

hvoraf den nye matrixfremstilling skaffes ved at multiplicere med T^{-1} fra venstre:

$$\underline{\tau}' = T^{-1}AS\underline{\xi}'.$$

Dette viser at F's matrix i de nye baser er $A' = T^{-1}AS$.

Vi kan igen (figur 9.2) give en skematisk fremstilling af sammenhægen mellem den lineære afbildning og dens matrixrepræsentationer. Yderst på pilene er noteret den lineære afbildning der er i spil, mens der inderst er angivet dens matrixrepræsentation i forhold til de aktuelle baser. Man kan nu ved at følge pilene finde alternative udtryk for A eller A'. Bemærk at hvis en lodret pil vendes, svarer det til den inverse matrix.

I det specialtilfælde som egentlig interesserer os mest her, er $n = p$, dvs F afbilder R^n ind i sig selv, og det er ét og samme basisskift der foregår i 'begge' rum. Det bevirker, at

$$
\begin{tikzcd}
\underline{\xi} \in \mathbf{R}^n_b \arrow[r, "F", "A"'] & \mathbf{R}^p_c \ni \underline{\tau} \\
\underline{\xi}' \in \mathbf{R}^n_{b'} \arrow[u, "I_n", "S"'] \arrow[r, "A'", "F"'] & \mathbf{R}^p_{c'} \ni \underline{\tau}' \arrow[u, "T", "I_p"']
\end{tikzcd}
$$

Figur 9.2 En skematisk afbildning.

$T = S$, så at vi i dette tilfælde får $A' = S^{-1}AS$. Desuden er både A og A' kvadratiske matricer.

S1: I denne situation har både A og A' determinanter, og der gælder

$$
\begin{aligned}
detA' &= det(S^{-1}AS) = detS^{-1}detAdetS \\
&= detS^{-1}detSdetA = det(S^{-1} \cdot S)detA = detE_n detA \\
&= detA.
\end{aligned}
$$

Vi ser altså at enhver matrix der repræsenterer F har samme determinant. Dette viser st determinanten er knyttet til den lineære afbildning selv og ikke blot den 'tilfældige' matrix-fremstilling afbildningen måtte være påduttet.

9.1 Egenværdier og egenvektorer

I et tidligere kapitel omtaltes en særlig venligsindet slags lineære afbildninger af et talrum ind i sig selv, de såkaldte proportionaliteter. De er givet ved $F(\underline{x}) = \alpha\underline{x}$ for alle $\underline{x} \in R^n$. Som vi ved er ikke alle lineære afbildninger af et talrum ind i sig selv af denne type. Alligevel kan det godt være at en afbildning der ikke er en proportionalitet i *hele* rummet kan være det i *dele* af rummet. Denne mulighed vil blive nærmere undersøgt i dette afsnit. Alle de afbildninger der optræder er lineære afbildninger $F : R^n \to R^n$.

Første et par begreber. Vi siger at en *egentlig* vektor $\underline{x}$ - altså en vektor $\neq \underline{0}$ - er en **egenvektor** for F, hvis der findes en skalar λ, så at

$$F(\underline{x}) = \lambda\underline{x}.$$

Skalaren λ kaldes den til $\underline{x}$ hørende **egenværdi**.

Hvis $\underline{x}$ er en egenvektor er ethvert multiplum $\alpha\underline{x}$ også en egenvektor med den samme egenværdi: $F(\alpha\underline{x}) = \alpha F(\underline{x}) = \alpha(\lambda\underline{x}) = \lambda(\alpha\underline{x})$. Det betyder altså at F virker som en proportionalitet på underrummet udspændt af $\underline{x}$. Det forhindrer ikke at F kan have andre egenvektorer svarende til samme egenværdi, som ikke er et multiplum af $\underline{x}$. Mængden af alle egenvektorer hørende til en given egenværdi λ

$$E_\lambda = \{\underline{x} \mid F(\underline{x}) = \lambda\underline{x}\}$$

kaldes det til λ hørende **egenrum**. Berettigelsen af betegnelsen 'rum' ligger i at *ethvert egenrum er et underrum i R^n*. Er nemlig $\underline{x}_1,\ \underline{x}_2 \in E_\lambda$ gælder det samme for $\alpha_1\underline{x}_1+\alpha_2\underline{x}_2$, da

$$\begin{aligned} F(\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2) &= \alpha_1 F(\underline{x}_1) + \alpha_2 F(\underline{x}_2) = \alpha_1(\lambda\underline{x}_1) + \alpha_2(\lambda\underline{x}_2) \\ &= \lambda(\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2). \end{aligned}$$

Dimensionen af egenrummet hørende til egenværdien λ kaldes λ's **geometriske multiplicitet**. Da $F(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$ er ensbetydende med $F(\underline{x}) - \lambda\underline{x} = \underline{0}$ eller $(F - \lambda I_n)\underline{x} = \underline{0}$, kan vi også se at egenrummet svarende til λ netop er nulrummet for afbildningen $F - \lambda I_n$, dvs

$$E_\lambda = N(F - \lambda I_n)$$

Som det fremgår opererer vi kun med egentlige egenvektorer. Der er jo ikke noget nyt eller interessant i at $F(\underline{0}) = \lambda\underline{0}$ for for alle λ. Derimod kan 0 godt være en egenværdi, nemlig hvis der findes en egentlig vektor $\underline{x}$ så at $F(\underline{x}) = \underline{0}$. Dette er tydeligvis ensbetydende med at nulrummet for F består af mere end blot nulvektoren, hvilket på sin side er ensbetydende med at F ikke er injektiv.

Sætning 9.1
Egenvektorer fra forskellige egenrum, dvs svarende til forskellige egenværdier, er lineært uafhængige.

Bevis
Denne påstand kræver et lille bevis. Lad $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k$ være forskellige egenværdier for F. Sætningens påstand er så at egenvektorerne $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_k$ svarende til hver af disse egenværdier er lineært uafhængige. Antager vi i stedet at disse vektorer er lineært afhængige, skal vi vise at det fører til modstrid.

Er vektorerne lineært afhængige findes et største tal $j,\ j < k$, lineært uafhængige vektorer blandt dem. Vi antager at nummereringen er foretaget sådan, at det er de j første, $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$ der er lineært uafhængige. Så vil $\underline{x}_{j+1}$ tilhøre $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j\}$, dvs:

$$\underline{x}_{j+1} = \alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_j\underline{x}_j,$$

hvor ikke alle α-erne er 0, da egenvektorerne er egentlige vektorer. Nu benytter vi F på begge sider:

$$\begin{aligned}\lambda_{j+1}\underline{x}_{j+1} &= F(\underline{x}_{j+1}) = F(\alpha_1\underline{x}_1 + \alpha_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_j\underline{x}_j) \\ &= \alpha_1 F(\underline{x}_1) + \alpha_2 F(\underline{x}_2) + \ldots + \alpha_j F(\underline{x}_j) \\ &= \alpha_1\lambda_1\underline{x}_1 + \alpha_2\lambda_2\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_j\lambda_j\underline{x}_j.\end{aligned}$$

Hvis nu $\lambda_{j+1} = 0$ har vi at gøre med en ikke-triviel fremstilling af $\underline{0}$ - ikke alle $\alpha_i\lambda_i$ kan være 0, da $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_j$ er forskellige fra $\lambda_{j+1} = 0$ og ikke alle α er 0 - som linearkombination af de lineært uafhængige $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$. Dette er ikke mulgt! Hvis på den anden side $\lambda_{j+1} \neq 0$, ville vi ved division opnå

$$\underline{x}_{j+1} = \alpha_1\frac{\lambda_1}{\lambda_{j+1}}\underline{x}_1 + \alpha_2\frac{\lambda_2}{\lambda_{j+1}}\underline{x}_2 + \ldots + \alpha_j\frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}}\underline{x}_j,$$

der jo giver en fremstilling af $\underline{x}_{j+1}$ som linearkombination af $\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j$. Denne fremstilling er forskellig fra den første, da λ-erne er indbyrdes forskellige, således at brøkerne $\frac{\lambda_1}{\lambda_{j+1}}, \frac{\lambda_2}{\lambda_{j+1}}, \ldots, \frac{\lambda_j}{\lambda_{j+1}}$ alle er forskellige fra 1, samtidig med at ikke alle α er 0. Vi har dermed to forskellige fremstillinger af vektoren $\underline{x}_{j+1}$ i en basis for $span\{\underline{x}_1, \underline{x}_2, \ldots, \underline{x}_j\}$. Heller ikke dette er muligt! Modstriderne kom af antagelsen om at de betragtede egenvektorer var lineært afhængige. De må derfor være lineært uafhængige. □

Hvordan afgør vi nu om en lineær afbildning $F : R^n \to R^n$ har nogen egenvektor? Hvis A er F's matrix i *grundbasen* i R^n, er F givet ved $F(\underline{x}) = A\underline{x}$. At F har en egenvektor kommer ud på at der findes et tal λ således at ligningssystemet $A\underline{x} = \lambda\underline{x}$ har en ikke-triviel løsning $\underline{x}$. Dette er det samme som at det homogene ligningssystem $(A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0}$ har en ikke-triviel løsning. Det er igen ensbetydende med at matricen $A - \lambda E$ ikke er invertibel, hvilket slutteligt er ækvivalent med at $det(A - \lambda E) = 0$. Summa summarum: *λ er en egenværdi for A hvis og kun hvis*

$$det(A - \lambda E) = 0.$$

Lad os lige se lidt nærmere på $det(A - \lambda E) = 0$. Vi har

$$det(A - \lambda E) = det\begin{pmatrix} a_{11} - \lambda & a_{12} & a_{13} & \vdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} - \lambda & a_{23} & \vdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} - \lambda & \vdots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \vdots & a_{nn} - \lambda \end{pmatrix}.$$

Benytter man definitionen på en determinant af en $n \times n$-matrix, vil det vise sig at $det(A - \lambda E)$ er et *n'te grads polynomium i λ*. Vi afstår fra at bevise det her - men det kan vises ved induktion. Dette polynomium kaldes **det karakteristiske polynomium** for F, eller blot for A. Vi har altså at F har egenvektorer hvis og kun hvis det karakteristiske polynomium for F har reelle rødder - og λ er en egenværdi for F netop hvis λ er rod i det karakteristiske polynomium. Antallet af gange λ er rod i det karakteristiske polynomium kaldes λ's **algebraiske multiplicitet**. Eftersom, et n'te grads polynomium højst har n reelle rødder, har F *højst n egenværdier*. Dette stemmer også overens med at egenvektorerne hørende til forskellige egenværdier er lineært uafhængige - sammenholdt med at $dimR^n = n$.

Hvis λ er en egenværdi for F er de tilhørende egenvektorer bestemt som løsningerne til ligningssystemet

$$(A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0}.$$

Eksempel 2

Lad $F : R^2 \to R^2$ være givet ved

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}.$$

Så er det karakteristiske polynomium

$$det \begin{pmatrix} 2-\lambda & -2 \\ -3 & 1-\lambda \end{pmatrix} = (2-\lambda)(1-\lambda) - 6 = \lambda^2 - 3\lambda - 4.$$

Det har rødderne $\lambda = 4$ og $\lambda = -1$, så F har egenværdierne 4 og -1.

For at finde de tilhørende egenvektorer skal vi løse ligningssystemerne

$$\begin{pmatrix} 2-4 & -2 \\ -3 & 1-4 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 2+1 & -2 \\ -3 & 1+1 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0},$$

der har løsningerne henholdsvis

$$t \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad u \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

for reelle t og u. Det betyder at $\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ er en basis for egenrummet E_4, mens $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$ er en basis for egenrummet E_{-1}. I de to egenrum virker F som en proportionalitet - i E_4 med proportionalitetsfaktoren 4 og i E_{-1} med proportionalitetsfaktoren -1. Egenvektorer fra de to rum er - ifølge de generelle overvejelser ovenfor - lineært uafhængige. Vælger vi

$$\underline{b}_1' = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{b}_2' = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

udgør de en ny basis for R^2. Eftersom $F(\alpha_1 \underline{b}_1' + \alpha_2 \underline{b}_2') = \alpha_1 4 \underline{b}_1' + \alpha_2(-1)\underline{b}_2'$, har F i denne basis matricen

$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Det fremgår altså at vi ved at overgå til en 'naturlig' basis for F - nemlig dens proportionalitetsretninger - giver F en meget mere håndterlig matrixfremstiulling. *

Eksempel 3

Afbildningen $F : R^2 \to R^2$, defineret ved

$$F(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \underline{x},$$

har det karakteristiske polynomium $(2-\lambda)(1-\lambda)+3 = \lambda^2 - 3\lambda + 5$, der har diskriminanten -11, og derfor har polynomiet ingen reelle rødder. F har altså ingen reelle egenværdier og ingen egenvektorer. Der er således ingen retninger hvor F virker som en proportionalitet. *

Dette var altså et eksempel på en lineær afbildning *der ikke har nogen egenvektorer.* I modsætning hertil står proportionaliteterne, $F(\underline{x}) = \lambda\underline{x}$, der har *har alle vektorer som egenvektorer* svarende til én og samme egenværdi, λ. Det næste eksempel giver et nyt indblik i hvad der kan ske.

Eksempel 4

Afbildningen $F : R^3 \to R^3$ givet ved

$$F(\underline{x}) = A\underline{x} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \underline{x}$$

har det karakteristiske polynomium

$$\begin{pmatrix} 1-\lambda & 2 & 2 \\ 2 & 1-\lambda & 2 \\ 2 & 2 & 1-\lambda \end{pmatrix} = -\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5$$

(udfør selv mellemregningerne). For at gøre det lettere at finde rødderne gør vi den observation, at enhver vektor af formen $\underline{x} = (x, x, x)$ er egenvektor for F, da $F(x, x, x) = 5(x, x, x)$. Den tilsvarende egenværdi er altså $\lambda = 5$, som altså er rod i det karakteristiske polynomium. Det betyder at faktoren $(\lambda - 5)$ kan 'sættes uden for' i det karakteristiske polynomium ved brug af polynomiers division. Derved finder vi $-\lambda^3 + 3\lambda^2 + 9\lambda + 5 = (\lambda-5)(-\lambda^2 - 2\lambda - 1) = -(\lambda-5)(\lambda+1)^2$, sådan at F også har egenværdien $\lambda = -1$ med algebraisk multiplicitet 2. Nu skal vi finde egenvektorerne svarende til de to egenværdier - vi har allerede fundet nogle svarende til $\lambda = 5$, men der kunne måske være flere? Vi skal løse ligningssystemerne

$$\begin{pmatrix} -4 & 2 & 2 \\ 2 & -4 & 2 \\ 2 & 2 & -4 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0} \quad \text{og} \quad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}.$$

Ved løsning af disse systemer viser det sig at egenrummene bliver

$$E_5 = span\{(1,1,1)\} \quad \text{og} \quad E_{-1} = span\{(-1,1,0);((-1,0,1)\}.$$

Det sidste viser, at den geometriske multiplicitet af $\lambda = -1$ er 2 - lige som den algebraiske multiplicitet. Kalder vi $\underline{b}'_1 = (1,1,1)$, $\underline{b}'_2 = (-1,1,0)$ og $\underline{b}'_3 = (-1,0,1)$ har vi øjensynligt at gøre med *en basis af egenvektorer* for R^3. Har $\underline{x}$ i denne basis koordinaterne (x'_1, x'_2, x'_3), altså $\underline{x} = x'_1\underline{b}'_1 + x'_2\underline{b}'_2 + x'_3\underline{b}'_3$, er

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) &= F(x'_1\underline{b}'_1 + x'_2\underline{b}'_2 + x'_3\underline{b}'_3) \\ &= x'_1F(\underline{b}'_1) + x'_2F(\underline{b}'_2) + x'_3F(\underline{b}'_3) \\ &= x'_1 5\underline{b}'_1 + x'_2(-1)\underline{b}'_2 + x'_3(-1)\underline{b}'_3, \end{aligned}$$

hvilket viser at F i egenvektorbasen har matricen

$$A' = \begin{pmatrix} 5 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Overgangen $\underline{x} = S\underline{x}'$ fra den oprindelige basis af grundvektorer til den nye basis af egenvektorer sker ved hjælp af koordinatskiftematricen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Læg mærke til at den første søjle i S er egenvektoren for egenværdien $\lambda = 5$, mens de to næste søjler er lineært uafhængige egenvektorer for egenværdien $\lambda = -1$. Dette er ikke nogen tilfældighed, jfr det følgende. *

Øvelse: Undersøg hvad der vil ske med A' hvis S i eksempel 3 får ommøbleret egenvektorerne i en anden rækkefølge eller af andre egenvektorer for den samme egenværdi. •

I betragtningerne om egenvektorer og egenværdier er vi gået ud fra en lineær afbildning F med en matrix A i en givet basis. Hvad nu hvis vi i stedet havde F givet ved dens matrix-fremstilling i en anden basis, sådan at matricen havde været en anden, B? Finder vi så andre egenvektorer og egenværdier? På forhold må svaret naturligvis være: Nej! Egenvektorer og egenværdier knytter sig til selve afbildningen og ikke til en 'tilfældig' basis, den måtte være givet i. Men så må dette forhold afspejles i matrixregneriet. Det gør det også; er T et vilkårligt basisskifte i R^n - ikke nødvendigvis ét der har med egenvektorer at gøre - findes en matrix $B = T^{-1}AT$, og om det karakteristiske polynomium for B gælder:

$$\begin{aligned} det(B - \lambda E) &= det(T^{-1}AT - \lambda E) = det(T^{-1}AT - \lambda T^{-1}T) \\ &= det(T^{-1}AT - T^{-1}(\lambda E)T) = det(T^{-1}(A - \lambda E)T) \\ &= detT^{-1}det(A - \lambda E)detT = det(A - \lambda E)detT^{-1}detT \\ &= det(A - \lambda E). \end{aligned}$$

Resultatet viser at F har *det samme karakteristiske polynomium i enhver basis.* Egenværdierne bestemmes altså lige så vel af den ene matrixfremstilling for F som den anden.

Gennem de tre eksempler har vi set at det nu og da er muligt at skifte til en basis af egenvektorer for en given lineær afbildning. Derved fik F en særligt simpel matrixfremstilling - nemlig en diagonalmatrix - hvor diagonalen var møbleret af egenværdierne for afbildningen. I andre tilfælde havde den betragtede afbildning ingen egenvektorer og egenværdier, og ingen diagonalmatrixfremstilling bød sig til. Vi vil nu afslutte kapitlet med en kort omtale af dette spørgsmål i almindelighed.

Vi siger, at en lineær afbildning $F : R^n \to R^n$ kan **diagonaliseres**, hvis der findes en basis for R^n, hvori F kan fremstilles ved en diagonalmatrix. Først og fremmest konstaterer vi, at *hvis F kan diagonaliseres findes en basis for R^n bestående af egenvektorer.* Lad nemlig F have matricen

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix},$$

i basen $\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \ldots, \underline{b}'_n$. Så er billedet af $\underline{b}'_1$ - der jo har koordinaterne $(1, 0, \ldots, 0)$ i denne basis - lig $\lambda_1 \underline{b}'_1$, dvs en egenvektor hørende til egenværdien λ_1. På tilsvarende måde er $\underline{b}'_2, \ldots, \underline{b}'_n$ egenvektorer for henholdsvis $\lambda_2, \ldots, \lambda_n$. Det viser så, at $\underline{b}'$-erne simpelthen er en basis af egenvektorer.

Hvis omvendt $F : R^n \to R^n$ har et sæt af egenvektorer der udgør en basis for R^n, kan F diagonaliseres. $\underline{b}'_1, \underline{b}'_2, \ldots, \underline{b}'_n$ er nu en basis for R^n af egenvektorer for F med tilhørende egenværdier $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - hvor λ-erne kan være forskellige eller nogle af dem ens, som det falder. Har vektoren $\underline{x}$ i denne basis koordinatfremstillingen $\underline{x} = x'_1 \underline{b}'_1 + x'_2 \underline{b}'_2 + \ldots + x'_n \underline{b}'_n$, gælder

$$\begin{aligned} F(\underline{x}) &= F(x'_1 \underline{b}'_1 + x'_2 \underline{b}'_2 + \ldots + x'_n \underline{b}'_n) = x'_1 F(\underline{b}'_1) + x'_2 F(\underline{b}'_2) + \ldots + x'_n F(\underline{b}'_n) \\ &= x'_1 \lambda_1 \underline{b}'_1 + x'_2 \lambda_2 \underline{b}'_2 + \ldots + x'_n \lambda_n \underline{b}'_n. \end{aligned}$$

Kaldes koordinaterne for $F(\underline{x})$ for $(y'_1, y'_2, \ldots, y'_n)$ fremgår det, at F's matrixfremstilling i $\underline{b}'$-basen er

$$\begin{pmatrix} y'_1 \\ y'_2 \\ \vdots \\ y'_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \vdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & \lambda_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'_1 \\ x'_2 \\ \vdots \\ x'_n \end{pmatrix},$$

hvilket netop er en diagonalmatrixfremstilling af F. Det her beviste samler vi i en sætning.

Sætning 9.2
F kan diagonaliseres hvis og kun hvis R^n har en basis af egenvektorer for F. Dette er ensbetydende med at der findes n lineært uafhængige egenvektorer for F.

Hvis F kan diagonaliseres, men ikke i den oprindelige basis har en diagonalmatrix, sker overgangen til den nye basis som sædvanlig ved

$$\underline{x} = S\underline{x}'.$$

hvor søjlerne i S er koordinaterne for de nye basisvektorer - *altså egenvektorerne* - i den gamle basis. Rækkefølgen af vektorerne i S bestemmer rækkefølgen af egenværdierne i den resulterende diagonalmatrix.

Det vil føre for vidt i denne fremstilling at give en udtømmende diskussion af hvilke lineære afbildninger, eller anderledes sagt: hvilke kvadratiske matricer, der kan diagonaliseres. Et par resultater følger dog af den indtil nu udviklede teori:

S2: Hvis F opfylder at summen af de geometriske multipliciteter for dens forskellige egenværdier - altså summen af egenrummenes dimension er lig n, kan F diagonaliseres. Da egenvektorer hørende til forskellige egenværdier er lineært uafhængige, findes i denne situation n lineært uafhængige egenvektorer for F. I kraft af deres antal udgør de en basis for R^n, og F kan diagonaliseres.

Dette udsagn har imidlertid et vigtigt specialtilfælde:

S2': Hvis F har n forskellige egenværdier kan F diagonaliseres. Da egenvektorerne hørende til de n forskellige egenværdier er lineært uafhængige, udgør de en basis for R^n, og dermed kan F diagonaliseres.

S3: En **symmetrisk** matrix er en kvadratisk matrix der er lig sin transponerede - dvs elementet på enhver plads (i, j) er lig elementet på plads (j, i). *Enhver symmetrisk matrix kan diagonaliseres.* I næste kapitel skal vi vende tilbage til symmetriske matricer.

Vi slutter diskussionen med et eksempel der viser eksistensen af afbildninger der nok har egenvektorer, men alligevel ikke kan diagonaliseres.

Eksempel 5

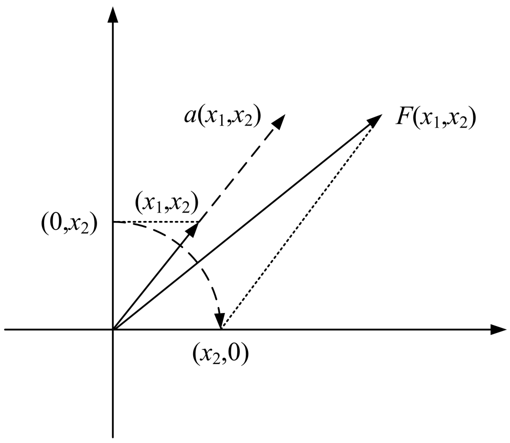
Hvis $F : R^2 \to R^2$ i grundbasen er givet ved en matrix af formen

$$\begin{pmatrix} a & 1 \\ 0 & a \end{pmatrix},$$

er det klart at det karakteristiske polynomium er $(a - \lambda)^2$, der jo har $\lambda = a$ som dobbeltrod. F har altså kun den ene egenværdi a. De tilhørende egenvektorer - F's eneste - er løsningerne til ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0},$$

der øjensynligt er $\underline{x} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $t \in R$. Det er altså ikke muligt at skaffe en basis for R^2 bestående af egenvektorer for F.



Figur 9.3 Afbildning svarende til eks. 5.

Vi kan forstå F's adfærd geometrisk. Der gælder jo, at $F(x_1, x_2) = (ax_1 + x_2, ax_2) = a(x_1, x_2) + (x_2, 0)$. Det viser - jfr figur 9.3 - at F afbilder en vektor på et multiplum af den *plus* vektoren $(x_2, 0)$, der ødelægger proportionalitetsbilledet. Kun for vektorer på x_1-aksen bliver denne vektor $\underline{0}$. *

10 Talrummet C^n

I dette kapitel skal vi se hvordan man ved at udvide synsfeltet til komplekse vektorrum - hvis vi altså må - bliver i stand at diagonalisere langt flere lineære afbildninger. Lad os motivere arbejdet med et eksempel.

Eksempel 1

Såfremt vi vil diagonalisere en lineær afbildning der er givet ved matricen

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

får vi det karakteristiske polynomium $det(A - \lambda E) = (1-\lambda)^2 + 1$. Ligningen $z^2 + 1 = 0$ kan vi imidlertid ikke løse inden for de reelle tal, men ligningen vil som bekendt have de to komplekse løsninger i og $-i$. Derfor vil der til A kunne findes *to komplekse egenværdier*

$$\lambda_1 = 1 + i \quad \text{og} \quad \lambda_2 = 1 - i,$$

hvor $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. På sædvanligvis finder vi de til λ_1 hørende egenvektorer af

$$(A - \lambda_1 E)\underline{x} = \begin{pmatrix} 1-(1+i) & -1 \\ 1 & 1-(1+i) \end{pmatrix} \underline{x} = \underline{0}$$

der giver ligningerne $-ix_1 - x_2 = 0$ og $x_1 - ix_2 = 0$. Derfor finder vi at en egenvektor svarende til egenværdien λ_1 er $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$. På samme måde finder vi at en egenvektor svarende til λ_2 bliver $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -i \\ 1 \end{pmatrix} = \overline{\underline{v}}_1$. *

Vi har nu set mulighederne ved at arbejde inden for komplekse talrum, og en naturlig måde at definere et vektorrum med komplekse koordinater vil være

$$C^n = \{\underline{z} = (z_1, z_2, \ldots, z_n) \mid z_1 \in C, \ldots, z_n \in C\}.$$

Vi kan også på C^n definere en **addition** og en **(kompleks) skalarmultiplikation** der modsvarer de operationer vi definerede for de reelle talrum, nemlig:

$$\underline{z} + \underline{w} = (z_1 + w_1, z_2 + w_2, \ldots, z_n + w_n) \quad \text{for alle} \quad \underline{z}, \underline{w} \in C^n$$
$$\lambda\underline{z} = (\lambda z_1, \lambda z_2, \ldots, \lambda z_n) \quad \text{for alle} \quad \underline{z} \in C^n,\ \lambda \in C.$$

De otte grundlæggende regneregler (1) - (8), der gælder i de reelle talrum, kan vi uden videre vise også gælder i C^n. Ethvert komplekst tal $z_j = a_j + ib_j$, hvor $a_j, b_j \in R$ er fastlag ved sin realdel og sin imaginærdel, der begge er reelle tal som opfylder de otte regneregler. Derfor vil de komplekse koordinater opfylde regnereglerne og ligeså elementerne i C^n.

Øvelse 1: Eftervis at regnereglen $\beta(\underline{z} + \underline{w}) = \beta\underline{z} + \beta\underline{w}$ gælder for alle $\underline{z}, \underline{w} \in C^n$ og $\beta \in C$. •

Alle de definitioner vi har indført i denne bog kan umiddelbart udvides til komplekse talrum, og da de otte regneregler nu også gælder for C^n, vil de sætninger vi har bevist indtil nu også gælde i C^n. I komplekse talrum kan vi altså med sindsro tale om og arbejde med *underrum, basis, dimension, egenværdier, egenvektorer* osv.

Øvelse 2a: Betragt C^n med den valgte addition og (den komplekse) skalarmultiplikation. Hvad bliver dimensionen af C^n? •

Øvelse 2b: Man kan vælge at skalarmultiplikationen på C^n kun skal arbejde med reelle skalarer; hvordan vil det påvirke dimensionen af C^n? •

Eksempel 1 (fortsat)

Vi viste i sidste kapitel at egenvektorer svarende til forskellige egenværdier er lineært uafhængige. Denne sætning gælder nu også for fx C^2, og vektorerne $\underline{v}_1$ og $\underline{v}_2$ kan derfor vælges som en basis i C^2 af egenvektorer for den lineære afbildning - givet ved A. Den til afbildningen svarende diagonalmatrix D og basisskiftematrix S er:

$$D = \begin{pmatrix} 1+i & 0 \\ 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Rigtigheden bekræftes ved at checke om $D = S^{-1}AS$ eller mere simpelt $AS = SD$. Dette er korrekt, da

$$AS = \begin{pmatrix} -1+i & -1-i \\ 1+i & 1-i \end{pmatrix} = SD. \ *$$

Vi har i eksempel 1 set at såvel egenvektorer som egenværdier for A er komplekst konjugerede. Dette er dog ingenlunde tilfældigt - når A er en reel matrix. Vi skal dog først præsicere et par forhold.

Lad os først definere hvad vi vil forstå ved en **komplekst konjugeret vektor** $\overline{\underline{z}}$ svarende til $\underline{z}$ og en **komplekst konjugeret matrix** $\overline{B}$ svarende til B. Er

$$\underline{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ \vdots \\ z_n \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{nn} \end{pmatrix}$$

vil vi definere at

$$\overline{\underline{z}} = \begin{pmatrix} \overline{z}_1 \\ \overline{z}_2 \\ \vdots \\ \overline{z}_n \end{pmatrix} \qquad \text{og} \qquad \overline{B} = \begin{pmatrix} \overline{b}_{11} & \overline{b}_{12} & \dots & \overline{b}_{1n} \\ \overline{b}_{21} & \overline{b}_{22} & \dots & \overline{b}_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \overline{b}_{n1} & \overline{b}_{n2} & \dots & \overline{b}_{nn} \end{pmatrix}.$$

Endvidere kan vi af regnereglen for komplekse tal - $\overline{z\,w} = \overline{z}\,\overline{w}$ - umiddelbart få, at $\overline{B\,\underline{v}} = \overline{B}\,\overline{\underline{v}}$. Tillige kan vi af udsagnet - $\overline{z} = z$ *hvis og kun hvis* $z \in R$ - slutte:

$$\overline{\underline{z}} = \underline{z} \text{ netop når } \underline{z} \in R^n \qquad \text{og} \qquad \overline{B} = B \text{ netop når } B \text{ er en reel matrix.}$$

Øvelse 3: Eftervis at regnereglen $\overline{B\,\underline{v}} = \overline{B}\,\overline{\underline{v}}$ gælder. •

Lad os nu vende tilbage sammenhængen mellem komplekse egenværdier og egenvektorer for reelle matricer. Vi betragter en reel matrix A som fx i eksempel 1; den vil have det karakteristiske polynomium $det(A - \lambda E)$, og dette polynomium vil også være reelt. Ethvert reelt polynomium kan faktoriseres i et produkt af førstegrads og andengrads polynomier - dette er en korrekt påstand, som vi ikke viser. Rødderne for et vilkårligt andengrads polynomium findes ved at løse en ligning af formen

$$\lambda^2 - p\lambda + q = 0.$$

Såfremt diskreminanten $d = p^2 - 4q < 0$ vil andengrads polynomiet have to komplekse rødder

$$\lambda_1 = \frac{p}{2} + i\frac{\sqrt{-d}}{2} \qquad \text{og} \qquad \lambda_2 = \frac{p}{2} - i\frac{\sqrt{-d}}{2},$$

dvs at $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$ - ligesom i eksempel 1.

Vi antager tillige at $\underline{v}$ er egenvektor svarende til λ_1, dvs $A\underline{v} = \lambda_1\underline{v}$. Hvis vi konjugerer denne ligning fremkommer følgende

$$\overline{A\underline{v}} = \overline{\lambda_1\underline{v}} \;\Leftrightarrow\; \overline{A}\overline{\underline{v}} = \overline{\lambda}_1\overline{\underline{v}} \;\Leftrightarrow\; A\overline{\underline{v}} = \lambda_2\overline{\underline{v}},$$

da A er en reel matrix og $\lambda_2 = \overline{\lambda}_1$. Vi kan nu slutte at vektoren $\overline{\underline{v}}$ vil være egenvektor for A svarende til egenværdien λ_2. Da ethvert egenrum er et underrum, vil også enhver vektor proportional med $\overline{\underline{v}}$ være egenvektor for λ_2. Vi har altså gjort følgende iagttagelse.

S1: Såfremt en reel matrix har komplekse egenværdier vil disse optræde i par af komplekst konjugerede egenværdier, og de tilhørende egenvektorer kan tilsvarende vælges komplekst konjugerede.

Eksempel 2

Vi skal nu diagonalisere den lineære afbildning $F : C^3 \to C^3$ givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

Vi finder på sædvanlig vis det karakteristiske polynomium

$$det(B - \lambda E) = -\lambda^3 + 3\lambda^2 - 4\lambda + 2 = (1-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda + 2),$$

der har de tre egenværdier $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + i$ og $\lambda_3 = 1 - i$. Egenvektorerne svarende til fx λ_2 finder vi nu ved Gauss-elimination på matricen $B - (1+i)E$:

$$\begin{pmatrix} -3-i & -2 & -9 \\ -1 & -i & -3 \\ 1 & 1 & 3-i \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -i & -3 \\ 1 & 1 & 3-i \\ -3-i & -2 & -9 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 & -i & -3 \\ 0 & 1-i & -i \\ 0 & -3-3i & 3i \end{pmatrix} \mapsto$$

$$\begin{pmatrix} -1 & -i & -3 \\ 0 & 1-i & -i \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(Prøv selv at gå disse beregninger efter). Vælger vi fx $x_3 = 2$ bliver $x_2 = -1+i$ og $x_1 = -5+i$. Dermed er egenrummet svarende til λ_2 udspændt af vektoren $\underline{v}_2 = \begin{pmatrix} -5+i \\ -1+i \\ 2 \end{pmatrix}$,

og derfor er egenrummet svarende til $\lambda_3 = \overline{\lambda}_2$ fastlagt af $\overline{\underline{v}}_2 = \begin{pmatrix} -5-i \\ -1-i \\ 2 \end{pmatrix}$.

Vis selv at en egenvektor svarende til λ_1 vil være $\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Nu er diagonalmatricen D og basisskiftematricen S

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+i & 0 \\ 0 & 0 & 1-i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad S = \begin{pmatrix} 3 & -5+i & -5-i \\ 0 & -2+i & -2-i \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}. *$$

Øvelse 4: Godtgør at matricerne i eksempel 2 opfylder $BS = SD$. •

10.1 Indre produkt

Inden vi fortsætter med at undersøge egenværdier og egenvektorer svarende til lineære afbildninger skal vi indfører begrebet *indre produkt*.

Et **indre produkt** på et reelt (komplekst) vektorrum V er en funktion der til ethvert vektorpar $\underline{u}, \underline{v} \in V$ tilordner et reelt (komplekst) tal $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$, der opfylder:

(1) $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle > 0$ hvis $\underline{u} \neq \underline{0}$

(2) $\overline{\langle \underline{v}, \underline{u} \rangle} = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$ (dvs kompleks konjugering hvis V er komplekst)

(3) $\langle \beta \underline{u}, \underline{v} \rangle = \beta \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle$

(4) $\langle \underline{u} + \underline{w}, \underline{v} \rangle = \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle + \langle \underline{w}, \underline{v} \rangle$

På de reelle talrum kan det være naturligt at vælge et indre produkt der er en generalisation af 'prikproduktet' for vektorer i rummet. Der findes dog mange andre indre produkter, se opgaverne. Er $\underline{u}, \underline{v} \in R^n$ kan vi vise at

$$\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = \underline{u}^T \underline{v} = u_1 v_1 + u_2 v_2 + \ldots + u_n v_n$$

er et indre produkt på R^n. På det komplekse talrum C^n kan vi tilsvarende definere et indre produkt ved

$$\langle \underline{z}, \underline{w} \rangle = \underline{z}^T \overline{\underline{w}} = z_1 \overline{w}_1 + z_2 \overline{w}_2 + \ldots + z_n \overline{w}_n.$$

I denne definition er vi nødt til at konjugere den ene vektor, da det indre produkt skal opfylde betingelse (1), at $\langle \underline{u}, \underline{u} \rangle > 0$ (dvs reel og positiv). Det sikres netop da

$$\langle \underline{z}, \underline{z} \rangle = \underline{z}^T \overline{\underline{z}} = z_1 \overline{z}_1 + z_2 \overline{z}_2 + \ldots + z_n \overline{z}_n = |z_1|^2 + |z_2|^2 + \ldots + |z_n|^2 > 0 \quad \text{når} \quad \underline{z} \neq \underline{0}$$

Øvelse 5: Eftervis at de to påstulerede indre produkter også rent faktisk vil opfylde de fire regneregler (1) - (4) for indre produkt. Vis tillige at vi i C^n ud fra reglerne (1) - (4) kan vise at

$$\langle \underline{u}, \beta \underline{v} \rangle = \overline{\beta} \langle \underline{u}, \underline{v} \rangle. \bullet$$

B1: Som det sikkert erindres vil to *egentlige* vektorer i rummet være *ortogonale* hvis og kun hvis deres prikprodukt er 0. Der er derfor nærliggende at definere at *to egentlige vektorer* $\underline{u}, \underline{v} \in V$ *er* **ortogonale** *netop når* $\langle \underline{u}, \underline{v} \rangle = 0$.

Vi har set hvordan det forholder sig med egenværdier og egenvektorer for reelle matricer. For en reel, kvadratisk matrix A har vi tidligere defineret den *transponerede* matrix - A^T. For en matrix B med komplekse elementer definerer vi tilsvarende den **adjungerede** matrix - $B^* = \overline{B}^T$ - dvs den konjugerede og transponerede matrix af B.

Reelle matricer kan også være *symmetriske* - dvs $A^T = A$. Det tilsvarende begreb for komplekse matricer er at en matrix er **selvadjungeret** (eller **hermitisk**), hvilket betyder $B^* = B$.

Øvelse 6: Vis at matricen

$$\begin{pmatrix} -1 & i & 2-i \\ -i & 2 & 4i \\ 2+i & -4i & 0 \end{pmatrix}$$

vil være selvadjungeret. $\bullet$

Øvelse 7: Vis at enhver selvadjungeret matrix B vil have reelle diagonalelementer - $\overline{b}_{jj} = b_{jj}$, samt at symmetriske elementer vil være komplekse konjugerede - $\overline{b}_{kj} = b_{jk}$. $\bullet$

S2: Hvis vi antager at en matrix A er selvadjungeret - dvs $A^* = A$ - skal vi vise at *alle egenværdier for A er reelle.*

Vi betragter talrummet C^n forsynet med det indre produkt $\langle \underline{z}, \underline{w} \rangle = \underline{z}^T \overline{\underline{w}}$ og antager at λ er en egenværdi for A med den tilhørende egenvektor $\underline{v}$ - dvs $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$. Da får vi ved at konjugere denne identitet, at

$$\overline{A\underline{v}} = \overline{\lambda \underline{v}} \quad \Leftrightarrow \quad \overline{A}\overline{\underline{v}} = \overline{\lambda}\overline{\underline{v}},$$

dvs, at $\overline{\lambda}$ er egenværdi for matricen $\overline{A}$ med den tilhørende egenvektor $\overline{\underline{v}}$. Da

$$\underline{z}^T \overline{\underline{w}} = z_1 \overline{w}_1 + z_2 \overline{w}_2 + \ldots + z_n \overline{w}_n = \overline{\underline{w}}^T \underline{z}$$

får vi tilsvarende at

$$(A\underline{v})^T \overline{\underline{v}} = \overline{\underline{v}}^T (A\underline{v}).$$

Vi kan nu vise påstanden ved følgende omskrivninger:

$$\begin{aligned} \lambda(\underline{v}^T \overline{\underline{v}}) &= (\lambda \underline{v})^T \overline{\underline{v}} = (A\underline{v})^T \overline{\underline{v}} = \overline{\underline{v}}^T (A\underline{v}) = \overline{\underline{v}}^T A \underline{v} \\ &= \overline{\underline{v}}^T A^* \underline{v} = (\overline{A\underline{v}})^T \underline{v} = (\overline{\lambda \underline{v}})^T \underline{v} = \overline{\lambda}(\overline{\underline{v}}^T \underline{v}). \end{aligned}$$

(Gennemgå selv disse omregninger, og begrund hvert enkelt skridt i ræsonnementet). Da $\underline{v}^T \overline{\underline{v}} = \overline{\underline{v}}^T \underline{v} > 0$, kan vi slutte at $\lambda = \overline{\lambda}$, og således vil λ være en reel egenværdi.

Da udsagnet gælder for selvadjungerede matricer, vil det naturligvis også gælde for (reelle) symmetriske matricer. Men ydermere kan vi af $A\underline{v} = \lambda \underline{v}$ slutte, at der inden for C^n kan fastlægges *reelle egenvektorer* svarende til de reelle egenvædier for den symmetriske matrix.

Vi kan tilmed vise endnu mere om egenvektorerne for selvadjungerede/symmetriske matricer. Vi antager fortsat at A er selvadjungeret. Har matricen de to forskellige egenværdier λ, μ med $\lambda \neq \mu$, ved vi at de tilhørende egenvektorer $\underline{v}$, $\underline{u}$ vil være lineært uafhængige, men vi kan vise mere. Af

$$\begin{aligned} \lambda(\underline{v}^T \overline{\underline{u}}) &= (\lambda \underline{v})^T \overline{\underline{u}} = (A\underline{v})^T \overline{\underline{u}} = \overline{\underline{u}}^T (A\underline{v}) = \overline{\underline{u}}^T A \underline{v} \\ &= \overline{\underline{u}}^T A^* \underline{v} = (\overline{A\underline{u}})^T \underline{v} = (\overline{\mu \underline{u}})^T \underline{v} = \overline{\mu}(\overline{\underline{u}}^T \underline{v}) = \mu(\underline{v}^T \overline{\underline{u}}) \end{aligned}$$

får vi, at $(\lambda - \mu)(\underline{v}^T \overline{\underline{u}}) = 0$, og da egenværdierne er forskellige, vil der gælde at $(\underline{v}^T \overline{\underline{u}}) = 0$, dvs de to egenvektiorer er ortogonale.

S3: Hermed har vi godtgjort følgende for selvadjungerede matricer: *Alle egenværdier er reelle og de tilhørende egenvektorer vil være indbyrdes ortogonale.*

S3': Som et specialtilfælde heraf kan vi for reelle symmetriske matricer konkludere at: *alle egenværdier er reelle og de tilhørende egenvektorer - der jo kan vælges reelle - vil være indbyrdes ortogonale.*

Eksempel 3

Betragter vi den lineære afboldning $G : C^3 \to C^3$ givet ved matricen

$$B = \begin{pmatrix} 2 & i & 2-i \\ -i & 1 & 0 \\ 2+i & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

ser vi at matricen er selvadjungeret, og vi ved at dens egenværdier er reelle. Det karakteristiske polynomium er nu

$$\begin{aligned} det(B - \lambda E) &= (2-\lambda)(1-\lambda)^2 - 5(1-\lambda) - (1-\lambda) \\ &= (1-\lambda)[\lambda^2 - 3\lambda - 4] = (-1-\lambda)(1-\lambda)(4-\lambda). \end{aligned}$$

En basis for egenrummet E_4 finder vi af

$$(B - 4E)\underline{v} = \begin{pmatrix} -2 & i & 2-i \\ -i & -3 & 0 \\ 2+i & 0 & -3 \end{pmatrix} \underline{v} = \underline{0}$$

der fx giver at

$$\underline{v}_4 = \begin{pmatrix} 3 \\ -i \\ 2+i \end{pmatrix}.$$

Tilsvarende finder vi egenvektorer for egenrummene E_{-1} og E_1 til

$$\underline{v}_{-1} = \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -2-i \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \underline{v}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ -2+i \\ i \end{pmatrix}.$$

Med denne egenvektorbasis får vi den til G svarende matrix D og den tilhørende basisskiftematrix S

$$D = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad S = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 \\ i & -2+i & -i \\ -2-i & i & 2+i \end{pmatrix}. \ *$$

Øvelse 8: Eftervis at $SD = BS$. •

Øvelse 9: Udregn S^*S, og giv en begrundelse for at resultatet bliver en diagonalmatrix. Hvad beskriver diagonalelementerne? •

11 Lineære differentialligninger

11.1 Indledning

En stor del af kapitlerne om lineær algebra har direkte eller indirekte beskæftiget sig med lineære ligningssystemer. I et sådant system er de ubekendte et sæt af *reelle (eller komplekse) tal*, som skal tilfredsstille de lineære ligningsbånd systemet består af.

Vi skal nu behandle ligninger af en anden type - de såkaldte **differentialligninger** - som udgør et af de matematiske emner som har størst betydning for matematikkens anvendelse i videnskabelige og praktiske anvendelser. I en *enkelt* differentialling er den ubekendte *en funktion*. En sådan er defineret på en delmængde af R, eventuelt hele R.

Der findes mange slags ligninger med funktioner som ubekendte uden at de af den grund er differentialligninger, fx ligningen $f^2 - 2f + 1 = 0$ - hvor f er den ubekendte funktion. Vi har først at gøre med en differentialligning, hvis der er tale om *bånd der forbinder en funktion med en eller flere af dens afledede* - fx $f' = f^2 - 2f + 1$. Hvis der kun indgår afledede af første orden kaldes differentialligningen - lidet overraskende - for en **1. ordens differentialligning**. Hvis den højeste orden af afledede der indgår er n, kaldes differentialligningen for en **n'te ordens differentialligning**. Generelt er en differentialligning af n'te orden et bånd af typen

$$F(t, f, f', \dots f^{(n)}) = 0,$$

hvor t er den uafhængige variabel i den søgte funktion f, og hvor som sædvanlig $f', f'', \dots, f^{(n)}$ er de afledede af f til og med orden n. Båndet er opskrevet som en funktion af hele molevitten. Et helt vildt, tilfældigt og uvigtigt eksempel er

$$t^3 f(t) f''(t) - sin \frac{2t + 1}{f'''(t)} - 2005 = 0.$$

Nogle gange ser vi i stedet for $f', f'', \dots, f^{(n)}$ betegnelser som $x(t), \frac{dx}{dt}, \frac{d^2x}{dt^2}, \dots, \frac{d^nx}{dt^n}$, eller $x(t), x'(t), x''(t), \dots, x^{(n)}(t)$. Læg mærke til at x-et står for en *funktion* og ikke for den uafhængige variabel - som altså er t. Dette sidste valg skyldes at mange, men dog ikke alle, differentialligninger beskriver fænomenter der udvikler sig i tiden, som så betragtes som den uafhængige variabel. I denne fremstilling vil vi fortrinsvis benytte den notation hvor de ubekendte funktioner betegnes med $x,\ y,\ z,\ x_1,\ x_2$ osv, mens den uafhængige variabel som nævnt betegnes med t.

Ved en **løsning** til en differentialligning forstås ganske enkelt en funktion med tilhørende definitionsmængde, som passer i differentialligningen. Nærmere bestemt skal de løsningsfunktioner vi interesserer os for være defineret på et *åbent* interval i R. Vi medregner både intervaller af formen $]a, \infty[$, $]-\infty, a[$ samt R selv. Når intervallet skal være åbent, er det fordi vi skal kunne differentiere funktionen - det relevante antal gange - i ethvert punkt af definitionsmængden, uden at tænke på om man mon kun kan gå til grænsen fra højre eller fra venstre. *Bemærk at vi kan tænke på en differentialligning som et sæt af uendeligt mange ligninger med uendeligt mange ubekendte. Differentialligningen skal jo være opfyldt for alle t i et vist interval, det giver én ligning svarende til hvert punkt t som den ubekendte funktion skal opfylde, og den ubekendte funktion skal have uendeligt mange værdier - én for hvert t.*

Hidtil har vi kun omtalt en enkelt differentialligning. Men lige som vi i beskæftigelsen med sædvanlige ligninger - med tal som ubekendte - havde god grund til at studere *ligningssystemer* hvor flere ubekendte bindes sammen i flere 'samtidige' ligninger, har vi brug for at studere **differentialligningssystemer**. Et differentialligningssystem består af flere sammenhørende differentialligninger i flere ubekendte funktioner. En løsning er så er *sæt* af funktioner - hver defineret på et åbent interval - som tilsammen passer i ligningerne.

Eksempel 1

Differentialligningssystemet af 1. orden,

$$x'(t) = ax(t)(1 - \frac{x(t) + y(t)}{K})$$
$$y'(t) = by(t)(1 - \frac{x(t) + y(t)}{L})$$

giver en generel model for dynamikken i to konkurrerende biologiske populationer, der til tiden t har størrelserne henholdsvis $x(t)$ og $y(t)$. Tallene $a,\ b,\ K,\ L$ er konstanter. *

Eksempel 2

Et andet eksempel på et differentialligningssystem har vi i

$$C_v'(t) = -\alpha C_v(t) + \beta C_s(t) + \gamma$$
$$C_s'(t) = \delta C_v(t) - \eta C_s(t).$$

Dette ligningssystem danner den såkaldte *Lorenzen-model* for fosforomsætningen i en sø. $C_v(t)$ angiver gennemsnitskoncentrationen af fosfor i søvandet til tiden t, mens $C_s(t)$ angiver gennemsnitskoncentrationen af fosfor i sedimentet. Størrelser $\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \eta$ er positive konstanter.

Modellens *første* ligning udtrykker den antagelse, at ændringen af fosforkoncentrationen i søvandet er sammensat af tre delændringer: (a) en vis brøkdel af søvandets fosfor afgives til sedimentet, (b) en vis brøkdel af sedimentets fosfor frigøres til søvandet; endelig

(c) tilføres søvandet fra omgivelserne en konstant mængde fosfor pr tidsenhed. Modellens *anden* ligning forestiller sig, at ændringen i fosforkoncentrationen i sedimentet er sammensat af (a) en positiv tilvækst, hidrørende fra at en brøkdel af søvandets fosfor overgår til sedimentet på genopløselig form, og en anden brøkdel bindes permanent i sedimentet, og (b) en negativ tilvækst der skyldes at en vis brøkdel af sedimentets fosfor frigives til søvandet. Jeg blev opmærksom på modellen, fordi den blev behandlet i et 2. semsters projekt (Hus 02.1, 1990). *

Desværre er det kun en forsvindende brøkdel af verdens differentialligninger man kan løse. Det er dog muligt af teoretisk vej at sige noget principielt og alment om løsningsforholdene for en større klasse af differentialligninger, end dem man kan løse eksplicit. Den samlede differentialligningsteori er uhyre kompliceret, mangesidet og righoldig på delstudier. På grund af emnets vigtighed også for anvendelserne er teorien enorm. I dette kursus kan vi kun berøre et lille - om end meget centralt - udsnit af emnet. Dette udsnit falder inden for klassen af såkaldte **lineære differentialligningssystemer**, hvor vi skal behandle den grundlæggende teori, der helt hviler på de resultater vi har opnået i lineær algebra. Lorenzen-modellens differentilligningssystem er et eksempel på et sådant lineært system. Nå, men nu er det vist på tide at gå til håndgribeligheder.

11.2 Elementære grundtrin. Funktionsrum

Verdens simpleste differentialligning er $x'(t) = 0$. Den er et eksempel på en lineær differentialligning - et begreb vi endnu ikke kender betydningen af. Ligningen kaldes **homogen**, fordi højresiden i ligningen er nulfunktionen. Dens løsninger består af alle konstante funktioner defineret på hele den reelle akse: $\{x : R \to R \mid x(t) = c,\ t \in R,\ c \in R\}$. En lidt mere kompliceret differentialligning har vi i $x'(t) = a(t)$, hvor a er en given reel funktion defineret på et åbent interval I. Lad os for nemheds skyld antage at a er kontinuert. Også denne differentialligning vil blive kaldt lineær, og **inhomogen** hvis a ikke er nulfunktionen. Ligningens løsninger består af samtlige stamfunktioner til a - de findes fordi a er valgt kontinuert:

$$\{x : R \to R \mid x(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\, du + c,\ t \in R,\ c \in R\}.$$

Her er $\int_{t_0}^{t} a(u)\, du$ den stamfunktion til a der i t_0 har værdien 0. Et specialtilfælde har vi, hvis a er en konstant funktion. I dette tilfælde bliver løsningsmængden $\{x : R \to R \mid x(t) = at + c,\ t \in R,\ c \in R\}$, idet vi har valgt $t_0 = 0$.

Inden vi går over til at behandle nogle mere udfordrende problemstillinger vil vi gøre en observation der er væsentlig for det følgende. Observationen har allerede betydning i forhold til de ovenstående simple eksempler.

Vi betragter mængden af *samtlige* reelle funktioner defineret på et givet interval I i R (I må gerne være R)

$$\mathbf{F}(I) = \{f \mid f : I \to R\}.$$

Sådanne funktioner kan adderes på sædvanlig måde - *punktvis* som vi siger: Summen af to funktioner på I, f og g, er defineret ved $(f+g)(t) = f(t) + g(t),\ t \in I$. *Nulfunktionen* - altså den funktion der er konstant 0 på I - er øjensynlig *neutral* ved addition. Additionen er tydeligvis *kommutativ* og *associativ*, og enhver funktion f har en *modsat funktion* $-f$. Dette viser at *addition af funktioner* på et interval I opfylder præcis de samme betiongelser som addition i talrummene R^n og C^n.

Vi kan også multiplicere funktioner på I med *skalarer* - dvs reelle (eller komplekse) tal - på den sædvanlige måde: Hvis f igen er en funktion på I defineres λf ved $(\lambda f)(t) = \lambda f(t)$. Skalaren 1 er åbentbart *neutral* ved denne skalarmultiplikation. I øvrigt opfylder skalarmultiplikationen de samme regneregler som skalarmultiplikation i talrummene, fx $\lambda(\mu f) = (\lambda\mu)f$. Tillige virker den *distributivt* over for addition, idet $(\lambda + \mu)f = \lambda f + \mu f$ og $\lambda(f+g) = \lambda f + \lambda g$.

Alt i alt opfylder addition og skalarmultiplikation i $\mathbf{F}(I)$ de tidligere grundregler (1) - (8) der er gældende i talrummene. Derfor er $\mathbf{F}(I)$ et *vektorrum*. Elementerne (vektorerne) i $\mathbf{F}(I)$ er altså funktioner. Vektorrum der består af funktioner kaldes **funktionsrum**. Begreberne **linearkombination, udspænding, lineær uafhængighed** (samt naturligvis *afhængighed*), **basis** og **dimension** lader sig uden videre overføre til denne situation.

Hvis $\mathbf{M}$ er en mængde af funktioner på et åbent interval I - dvs $\mathbf{M}$ er en delmængde af $\mathbf{F}(I)$ - forstår vi ved *span*($\mathbf{M}$) mængden af alle linearkombinationer som kan dannes ved hjælp af endelig mange funktioner fra $\mathbf{M}$:

$$\mathit{span}(\mathbf{M}) = \{\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2 + \ldots + \lambda_k f_k \mid k \in N,\ f_1, f_2, \ldots, f_k \in \mathbf{M},\ \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k \in R\}.$$

Læg mærke til at antallet - k - af elementer i disse linearkombinationer er vilkårligt. Et element i *span*($\mathbf{M}$) er altså en funktion g, der er givet ved

$$g(t) = \lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \ldots + \lambda_k f_k(t) \text{ for alle } t \in R.$$

I overensstemmelse med vores tidligere sprogbrug omtaler vi *span*($\mathbf{M}$) som **underrummet udspændt af M**. Det ses at underrummene i $\mathbf{F}(I)$ netop er de delmængder af $\mathbf{F}(I)$ som er stabile, dvs lukkede over for linearkombinering.

Et sæt af funktioner $f_1, f_2, \ldots, f_k$ fra $\mathbf{F}(I)$ er **lineært uafhængige**, netop hvis en linearkombination af f-erne kun kan fremstille nulfunktionen på I hvis linearkombinationen er triviel. Præcist sagt: Hvis

$$\lambda_1 f_1(t) + \lambda_2 f_2(t) + \ldots + \lambda_k f_k(t) = 0 \text{ for alle } t \in I,$$

må alle λ-erne være 0.

Det er væsentligt at gøre sig klart, at uanset om det gælder linearkombinering, udspænding, lineær uafhængighed eller andet, angår lighedstegnene hele *funktioner*, altså samtlige funktionsværdier på det relevante interval I, og ikke kun værdierne i et enkelt eller nogle få punkter.

Eksempel 3

Vi skal nu undersøge om de tre funktioner $f_1(t) = 1,\ f_2(t) = sint$ og $f_3(t) = cost$ defineret på intervallet $I =]-\pi, \pi[$ vil være lineært uafhængige for alle $t \in I$, dvs om der findes $(\alpha, \beta, \gamma) \neq (0, 0, 0)$, så

$$\alpha + \beta sint + \gamma cost = 0 \text{ for alle } t \in I.$$

Da ligningen skal være opfyldt for *alle* mulige t, kan vi løse ligningen mht (α, β, γ) for udvalgte t-værdier - aktuelt $t = 0,\ t = \frac{\pi}{2}$ og $t = -\frac{\pi}{2}$. Vi får da

$$\alpha + \gamma = 0, \qquad \alpha + \beta = 0 \quad \text{og} \quad \alpha - \beta = 0,$$

der kun vil have løsningen $(\alpha, \beta, \gamma) = (0, 0, 0)$. Derfor vil de tre funktioner være lineært uafhængige. *

En (endelig) basis for et underrum $\mathbf{U}$ i $\mathbf{F}(I)$ er et *endeligt* sæt af funktioner, der (1) udspænder $\mathbf{U}$, og (2) er lineært uafhængigt. Antallet af funktioner i en sådan basis kaldes underrummets **dimension**. Underrummet alene bestående af nulfunktionen har ikke nogen basis, og den tillægges dimensionen 0.

I talrummene fandt vi at alle underrum - inclusive talrummene selv - besidder (endelige) baser. Sådan er det langt fra i funktionsrummene. Der findes fx *ingen endelig basis* for $\mathbf{F}(I)$ selv. Ingen nok så stor samling af endelig mange funktioner fra $\mathbf{F}(I)$ er righoldig nok til at frembringe enhver anden funktion fra $\mathbf{F}(I)$ som linearkombination af funktioner fra samlingen. De underrum af $\mathbf{F}(I)$ som ikke har endelig basis kaldes *uendeligdimensionale*.

Der findes en masse vigtige underrum i $\mathbf{F}(I)$. Et vigtigt underrum udgøres af de *differentiable funktioner* på I, benævnt $\mathbf{D}(I)$. At disse funktioner virkelig udgør et underrum i $\mathbf{F}(I)$ følger simpelthen af, at en linearkombination af differentiable funktioner igen er en differentiabel funktion. Et endnu vigtigere underrum udgøres af den mængde af funktioner på I, der ud over at være differentiable også opfylder at deres afledede funktion er kontinuert. Igen er det klart at denne delmængde er stabil over for linearkombinering. Funktioner af denne type kaldes kort **kontinuert differentiable**, og underrummet bestående af dem betegnes $\mathbf{C}(I)$. Det gælder åbenbart at $\mathbf{C}(I)$ er et underrum i $\mathbf{D}(I)$, der jo på den anden side er et underrum i $\mathbf{F}(I)$. Heller ingen af disse underrum har endelige baser.

11.3 Lineære differentialligninger af 1. orden

Ser vi på løsningsrummet $\{x : R \to R \mid x(t) = c, t \in R, c \in R\}$ for den homogene differentialligning $x'(t) = 0$, er det øjensynlig et underrum i $\mathbf{C}(R)$. Hvis vi med 1 betegner den funktion der er konstant 1 på R har vi simpelthen at $\{x : R \to R \mid x(t) = c, t \in R, c \in R\} = span\{1\}$. Da elementet 1 desuden danner et lineært uafhængigt sæt - da funktionen ikke er nulfunktionen - har vi fundet at 1 udgør en basis for underrummet. Dette underrum er således 1-dimentionalt. Løsningsrummet $\{x : R \to R \mid x(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,du + c,\ t \in R,\ c \in R\}$ til den inhomogene differentialligning $x'(t) = a(t)$ er det *sideunderrum* til $span\{1\}$ i $\mathbf{C}(I)$ der 'går gennem' elementet x_0, givet ved $x_0(t) = \int_{t_0}^{t} a(u)\,du$, hvor $t \in R$.

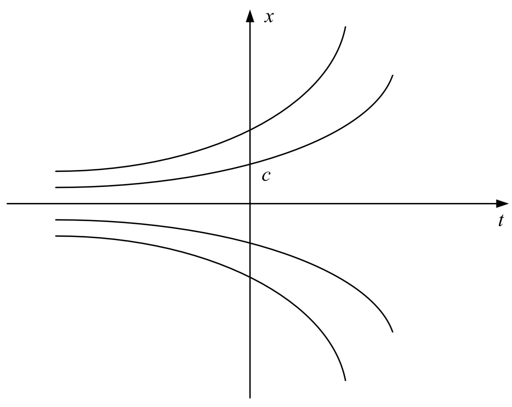
De første ikke-trivielle differentialligninger man støder på, generaliserer de ovennævnte. Ligningen $x'(t) = ax(t)$, hvor a er et reelt tal, har $x'(t) = 0$ som specialtilfælde - når $a = 0$. Som bekendt har løsningsmængden til $x'(t) = ax(t)$ formen

$$\{x : R \to R \mid x(t) = ce^{at},\ t \in R,\ c \in R\}.$$

Indskud 1

Hvis du ikke kan huske hvorfor, så se det følgende. Allerførst konstaterer vi at nulfunktionen på R er en løsning. Dernæst søger vi de eventuelle positive løsninger. For disse er differentialligningen ensbetydende med ligningen $\frac{x'(t)}{x(t)} = a$, men da $\frac{x'(t)}{x(t)} = (lnx(t))'$, kommer dette ud på at $(lnx(t))' = a$. Dette er jo ensbetydende med at $lnx(t)$ er en stamfunktion til a, dvs $lnx(t) = at + b$ for $t \in R$, hvor b er en vilkårlig konstant. Heraf slutter vi at $x(t) = e^{at+b} = e^b e^{at}$ med $t \in R$, og da e^b gennemløber de positive reelle tal når b gennemløber R, kan vi lige så godt skrive c i stedet for e^b. De søgte, positive løsninger har altså formen $ce^{at},\ c \in R_+$. Der vil øjensynlig tilsvarende være de negative løsninger $ce^{at},\ c \in R_-$. Bortset fra disse og nulløsningen - jfr figur 11.1 - findes der ikke andre løsninger til denne differentialligning. Er nemlig x en løsning på R, må der om funktionen $w(t) = e^{-at}x(t)$, $t \in R$, gælde at

$$w'(t) = (e^{-at}x(t))' = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}x'(t) = -ae^{-at}x(t) + e^{-at}ax(t) = 0,$$



Figur 11.1 Nogle løsninger til $x'(t) = ax(t)$.

hvor det næstsidste lighedstegn skyldes at x er en løsning til differentialligningen. Vores udregning viser at funktionen w er en stamfunktion til 0. Der gælder derfor at

$e^{-at}x(t) = w(t) = c$, hvor c er en vilkårlig reel konstant, og således har x den postulerede form. Faktisk kunne vi - bagklogt - have nøjedes med de sidste betragtninger, der jo udpeger samtlige løsninger. Men idéen til at inddrage w fik vi først efter at have fundet at x_0, givet ved $x_0(t) = e^{at},\ t \in R$ er en nulpunktsfri løsning til differentialligningen. *

Løsningsrummet til differentialligningen $x'(t) = ax(t)$ er altså

$$\{x : R \to R \mid c \in R,\ x(t) = ce^{at},\ t \in R\} = span\{x_0\},$$

hvoraf det fremgår at løsningsrummet er et **1-dimensionalt underrum i** $F(R)$. Vi kan også skrive ligningen som $x'(t) - ax(t) = 0$, hvilket begrunder at vi kalder den **en homogen differentialligning af 1. orden med konstante koefficienter**.

Hvis der er givet et vilkåtligt 'tidspunkt' t_0 og en vilkårlig funktionsværdi x_0, findes der netop én løsning x til differentialligningen, som til tidspunktet t_0 har værdien x_0. Vi skal nemlig blot vælge parameteren c, så at $ce^{at_0} = x_0$, dvs $c = x_0e^{-at_0}$. Det problem at efterspørge - blandt løsningerne til en differentialligning - den/de løsninger som til et givet tidspunkt t_0 har en given værdi x_0, kaldes et **begyndelsesværdiproblem**. Vi har just indset, at for en homogen 1. ordens lineær differentialligning har ethvert begyndelsesværdiproblem en entydig bestemt løsning.

En inhomogen differentialligning af 1. orden med konstante koefficienter er en ligning af formen $x'(t) - ax(t) = b$, hvor både a og b er konstanter. For at ligningen virkelig skal være inhomogen, må $b \neq 0$. Lad os finde samtlige løsninger til den. Øjensynlig er den konstante funktion $x_1(t) = -\frac{b}{a},\ t \in R$ én løsning på R. Hvis x er en anden løsning til ligningen, skal vi se at $x + x_1$ er en løsning til den tilsvarende homogene ligning, da jo

$$(x + x_1)'(t) = x'(t) = ax(t) + b = a(x(t) + \tfrac{b}{a}) = a(x + x_1)(t).$$

Ud fra løsningen af den homogene ligning ser vi, at $x(t) + \frac{b}{a} = ce^{at},\ t \in R$, eller omformet at

$$x(t) = -\frac{b}{a} + ce^{at},\ t \in R,$$

der er et sideunderrum til løsningsrummet for den homogene, 'gående igennem' funktionen $x_1(t) = -\frac{b}{a}$.

Også her har ethvert begyndelsesværdiproblem netop én løsning. Er nemlig t_0 og x_0 givne, vil den løsning der er givet ved at $c = e^{-at_0}(x_0 + \frac{b}{a})$ løse begyndelsesværdiproblemet.

Indskud 2

I behandling af andre problemstillinger i forbindelse med kurset kan vi få brug for at kunne løse *en inhomogen 1. ordens differentialling* som *ikke* har konstante koefficienter, aktuelt en ligning af formen

$$x'(t) - kx(t) = g(t),$$

hvor k godt nok er en konstant, men hvor g er en kontinuert funktion givet på et interval I. For at løse ligningen benytter vi os af et lille trick. Enhver funktion x på et interval kan skrives som $x(t) = y(t)e^{kt}$ for en passende funktion y, idet vi simpelthen kan sætte $y(t) = x(t)e^{-kt},\ t \in I$. Vi undersøger nu betingelsen for at $x(t)$ (dvs $= y(t)e^{kt}$) er en løsning til den betragtede differentialligning på I. Det kommer jo per definition ud på at

$$(y(t)e^{kt})' = ky(t)e^{kt} + g(t), \quad \text{dvs} \quad y'(t)e^{kt} + ky(t)e^{kt} = ky(t)e^{kt} + g(t),\ t \in I.$$

Dette er åbenbart det samme som at $y'(t)e^{kt} = g(t),\ t \in I$, der igen er ensbetydende med at $y'(t) = g(t)e^{-kt},\ t \in I$. Men dette sidste er et rent stamfunktionsproblem, hvis løsning er

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} g(t)e^{-kt}\,dt + \beta,\ t \in I,\ \beta \in R.$$

Her er t_0 et vilkårligt, men fast tal i I.

Vi har altså at løsningerne til den inhomogene differentialligning er givet ved

$$x(t) = e^{kt}y(t) = e^{kt}(\int_{t_0}^{t} g(t)e^{-kt}\,dt + \beta),\ t \in I,\ \beta \in R.$$

Begyndelsesværdiproblemet svarende til denne situation har en entydig bestemt løsning for $t_0 \in I$ og et vilkårligt $x_0 \in R$. Den fås ved at opsøge den blandt stamfunktionerne der til 'tid' t_0 er 0, og sætte $\beta = x_0e^{-kt_0}$. *

11.4 Lineære differentialligningssystemer af 1. orden med konstante koefficienter

Vi vil først se på et overmåde simpelt *homogent system* af lineære 1. ordens differentialligninger med konstante koefficienter, nemlig

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= a_1x_1(t) \\ x_2'(t) &= a_2x_2(t) \\ &\vdots \\ x_n'(t) &= a_nx_n(t), \end{aligned}$$

hvor $a_1, a_2, \ldots, a_n$ er reelle konstanter. Som det fremgår har ligningerne i virkeligheden ingen ting med hinanden at gøre - de er helt **afkoblede**. Hver ligning kan løses for sig efter de sidste afsnit beskrevne retningslinier. Således finder vi

$$x_1(t) = c_1e^{a_1t}, \quad x_2(t) = c_2e^{a_2t}, \quad \ldots\ , \quad x_n(t) = c_ne^{a_nt},$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er vilkårlige reelle konstanter, og hvor alle funktionerne er defineret for $t \in R$.

I det følgende vil vi gøre rede for at løsningen af en vigtig klasse af komplicerede og stærkt forbundne lineære 1. ordens differentialligninger kan føres tilbage til et system af den netop behandlede art, ved anvendelse af - ja, hvad mon? - lineær algebra! Først vil vi dog skrive det ovenstående system på matrixform:

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ \vdots \\ x_n'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & a_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & a_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & a_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ \vdots \\ x_n(t) \end{pmatrix}.$$

Dette fortjener et par kommentarer. Tidligere har vi kun arbejdet med rækker og søjler hentet fra talrummene. Tilsvarende har vi kun opereret med produkter af matricer og søjler, hvor søjlerne var dannet af tal. Der er selvfølgelig intet som helst i vejen for som specialtilfælde heraf at betragte søjler som er talsæt af funktionsværdier - én søjle for hvert t i det relevante interval. Matrixoperationerne og reglerne for dem virker selv sagt lige så godt hvis tallene i søjlerne tilfældigvis er funktionsværdier. Hvis vi for *ethvert* t betragter vektoren $(x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t))$ - skrevet som række eller søjle som det nu passer os - har vi fastlagt en afbildning fra R ind i R^n. Denne afbildning betegnes $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ og kaldes gerne en **vektorfunktion**. Undertiden vil vi bruge den korte notation $\mathbf{x}$ for vektorfunktionen $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ - analogt med at vi tidligere har indført den korte betegnelse $\underline{x}$ for *talrums*vektoren $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, når x-erne står for tal. Det er endvidere nærliggende at benytte notationen $\mathbf{x}'$ for vektorfunktionen af de afledede: $(x_1', x_2', \ldots, x_n')$. På denne måde kan vi sammenfatte det ovenstående således

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}, \tag{11.1}$$

hvor A er den opskrevne diagonalmatrix. (*Pas på!* Du skal ikke forveksle ligningen med et basisskifte, bare fordi der står $'$ i ligningen.) Løsningssættet til ligningen (11.1) kan opskrives som vektorfunktionen fastlagt ved

$$\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} c_1 e^{a_1 t} \\ c_2 e^{a_2 t} \\ \vdots \\ c_n e^{a_n t} \end{pmatrix}, \quad t \in R,$$

hvor $c_1, c_2, \ldots, c_n$ er vilkårlige reelle tal.

Også her kan vi formulere - og besvare - et til situationen hørende **begyndelsesværdiproblem**: Lad der være givet et $t_0 \in R$ og en vektor $\underline{x}_0 = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ i R^n. Bestem den/de eventuelle løsningsfunktioner $\mathbf{x}(t_0) = \underline{x}_0$. Det ses at ethvert sådant problem har netop én løsning, nemlig den som er fastlagt ved at $c_1 = x_1 e^{-a_1 t_0}$, $c_2 = x_2 e^{-a_2 t_0}$, $\ldots$, $c_n = x_n e^{-a_n t_0}$.

Den generelle løsning til ligningen (11.1) kan også opskrives som

$$\mathbf{x}(t) = c_1 \begin{pmatrix} e^{a_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{a_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + c_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{a_n t} \end{pmatrix}.$$

Det fremgår altså, at enhver løsningsvektorfunktion $\mathbf{x}$ til differentialligningen (11.1) er en linearkombination af løsningsvektorfunktionerne $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ givet ved

$$\mathbf{x}_1(t) = \begin{pmatrix} e^{a_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \mathbf{x}_2(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ e^{a_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix},\ \ldots,\ \mathbf{x}_n(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{a_n t} \end{pmatrix}.$$

Dette lægger op til et lille indskud.

Indskud 3

Lige som vi i det foregående afsnit organiseret de reelle funktioner på et givet interval I som et vektorrum ved (punktvis) addition og skalarmultiplikation, kan vi organisere vektorfunktionerne - med n komponenter - på I som et vektorrum med punktvis addition og skalarmultiplikation på hver af de n pladser. Dette er aldeles analogt til den måde hvorpå vi organiserede sæt af reelle tal - ved at addere og skalarmultiplicere tallene pladsvis. Benytter vi betegnelsen $\mathbf{F}_n(I)$ for mængden af vektorfunktioner med n komponenter på intervallet I, er $\mathbf{F}_n(I)$ altså et vektorrum med den netop indførte addition og skalarmultiplikation.

Begreber som 'linearkombination', 'udspænding', 'lineær (u)afhængighed' 'basis', 'dimension', mm overføres uden videre til den nye situation. Vi bemærkede i sidste afsnit at $\mathbf{F}(I)$ - der forresten er lig $\mathbf{F}_1(I)$ - ikke har nogen endelig basis. Derfor har $\mathbf{F}_n(I)$ selvfølgelig heller ikke nogen endelig basis.

I fortsættelse af betegnelserne for de forskellige rum af reelle funktioner på et interval I, betegner vi med $\mathbf{D}_n(I)$ underrummet af $\mathbf{F}_n(I)$ bestående af de vektorfunktioner, hvis komponentfunktioner er differentiable på I. At der virkeligt er tale om et underrum skyldes at linearkombination af sådanne vektorfunktioner har komponenter der er linearkombination af differentiable funktioner. Ligeledes vil vi med $\mathbf{C}_n(I)$ betegne det underrum af $\mathbf{D}_n(I)$ - og dermed af $\mathbf{F}_n(I)$ - der udgøres af de vektorfunktioner hvis komponentfunktioner alle er kontinuert differentiable. *

De n løsninger $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ er lineært uafhængige. Lad os nemlig betragte en fremstilling af *nulfunktionen 0* som linearkombination af disse vektorfunktioner

$$0 = \alpha_1 \mathbf{x}_1 + \alpha_2 \mathbf{x}_2 + \ldots + \alpha_n \mathbf{x}_n.$$

Dette er ensbetydende med at der for ethvert $t \in R$ gælder

$$\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} = \alpha_1\begin{pmatrix}e^{a_1t}\\0\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \alpha_2\begin{pmatrix}0\\e^{a_2t}\\\vdots\\0\end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n\begin{pmatrix}0\\0\\\vdots\\e^{a_nt}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha_1e^{a_1t}\\\alpha_2e^{a_2t}\\\vdots\\\alpha_ne^{a_nt}\end{pmatrix}.$$

Eftersom de indgående eksponentialfunktioner ikke ligefrem er konstanten 0 - de antager som bekendt overhovedet ikke værdien 0, så chancerne er små - må alle α-erne være 0, dvs så er $\mathbf{x}$-erne *lineært uafhængige*. Samtidig fandt vi netop ovenfor at $\mathbf{x}$-erne *udspænder* mængden af løsninger til differentialligningen (11.1). Dette viser at løsningsmængden er et *underrum* - i $\mathbf{C}_n(R)$, da alle komponentfunktionerne åbentbart er kontinuert differentiable - med $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_n$ som basis. Løsningsrummet, som vi nu er berettiget til at kalde det, har således *dimensionen n.*

Nu er vi rede til at behandle et generelt **homogent** system af 1. ordens lineære differentialligninger med konstante koefficienter. Derved forstår vi et system af formen

$$\begin{aligned}
x_1'(t) &= a_{11}x_1(t) + a_{12}x_2(t) + \ldots + a_{1n}x_n(t)\\
x_2'(t) &= a_{21}x_1(t) + a_{22}x_2(t) + \ldots + a_{2n}x_n(t)\\
&\vdots\\
x_n'(t) &= a_{n1}x_1(t) + a_{n2}x_2(t) + \ldots + a_{nn}x_n(t),
\end{aligned}$$

hvor alle a-erne er konstante, og hvor $t \in R$. Efter helt samme retningslinier som før kan vi skrive dette system på matrixform

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x},$$

hvor A - der gerne kaldes **koefficientmatricen** - her står for

$$\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n}\\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ a_{n1} & a_{n2} & \ldots & a_{nn}\end{pmatrix}.$$

Sådanne systemer kan opstå som modeller for fænomener og problemstillinger uden for matematikken selv, men inden vi kan begynde at arbejde med sådanne systemer, er det nok bekvemt at foretage en matematisk behandling af et sådant system.

Ideén i behandlingen er at foretage - hvis det da er muligt - et basisskift i R^n så at systemet ovenfor bringes på diagonalform. Dermed menes at det oprindelig system erstattes af ét på diagonalform - som så kan løses som ovenfor - der til med har en brugbar forbindelse til det oprindelige system. Vi går til værks som så:

Vi ved at en matrix A kan diagonaliseres netop hvis der findes en basis for R^n bestående af egenvektorer for A, hvilket desværre ikke altid er tilfældet. Diagonaliseringen udføres ved anvendelse af den matrix S, hvis søjler er egenvektorerne for A - udtrykt i den oprindelige basis, som vi her simpelthen vælger som grundvektorerne i R^n. I følge den udviklede teori opnår vi at matricen D, givet ved

$$D = S^{-1}AS,$$

er en diagonalmatrix, hvor der i diagonalen står egenværdierne for A i en rækkefølge der svarer til egenvektorernes rækkefølge i S. Så kan vi udtrykke det oprindelige differentialligningssystem ved hjølp af D og S, idet

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} = (SDS^{-1})\mathbf{x},$$

hvoraf fås

$$S^{-1}\mathbf{x}' = DS^{-1}\mathbf{x}.$$

Før vi går videre, må vi sikre at der er mening i galskaben. Hvad er egentlig meningen med vektorfunktionen $S^{-1}\mathbf{x}'$, osv? Jo, hvis vi har givet en vektorfunktion $\mathbf{x}$ defineret på et interval I, og en kvadratisk matrix M, er $M\mathbf{x}$ en vektorfunktion, bestemt ved at

$$M\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} m_{11}x_1(t) + m_{12}x_2(t) + \ldots + m_{1n}x_n(t) \\ m_{21}x_1(t) + m_{22}x_2(t) + \ldots + m_{2n}x_n(t) \\ \vdots \\ m_{n1}x_1(t) + m_{n2}x_2(t) + \ldots + m_{nn}x_n(t) \end{pmatrix}$$

for $t \in R$. Her ser vi, da differentiation foregår komponentvis, at

$$(M\mathbf{x})'(t) = \begin{pmatrix} m_{11}x_1'(t) + m_{12}x_2'(t) + \ldots + m_{1n}x_n'(t) \\ m_{21}x_1'(t) + m_{22}x_2'(t) + \ldots + m_{2n}x_n'(t) \\ \vdots \\ m_{n1}x_1'(t) + m_{n2}x_2'(t) + \ldots + m_{nn}x_n'(t) \end{pmatrix} = M\mathbf{x}'(t).$$

Konklusionen er, at $(M\mathbf{x})' = M\mathbf{x}'$, og benyttes dette med S^{-1} i M's rolle, har vi altså at $(S^{-1}\mathbf{x})' = S^{-1}\mathbf{x}'$.

Resultatet fra før $S^{-1}\mathbf{x}' = DS^{-1}\mathbf{x}$ kan altså ydtrykkes $(S^{-1}\mathbf{x})' = D(S^{-1}\mathbf{x})$. Det viser imidlertid, at vektorfunktionen $S^{-1}\mathbf{x}$ er en løsning til et differentialligningssystem på *diagonalform*: $\mathbf{y}' = D\mathbf{y}$, hvis løsninger vi allerede kender. Hvis diagonalelementerne i D, dvs egenværdierne i A, er $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ - som ikke nødvendigvis er forskellige - gælder

$$S^{-1}\mathbf{x}(t) = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

hvor α-erne er vilkårlige reelle tal. Multiplikation med S fra venstre giver os *løsningerne til det oprindelige ligningssystem*:

$$\mathbf{x}(t) = S \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \tag{11.2}$$

hvor α-erne er vilkårlige reelle tal og $t \in R$. Det ses at alle løsningsfunktionerne har kontinuerte afledede, dvs $\mathbf{x} \in \mathbf{C}_n(R)$.

Også i denne situation har begyndelsesværdiproblemet en entydigt bestemt løsning. Er nemlig $t_0 \in R$ og $\mathbf{x}_0 \in R^n$ givet, kan vi bestemme α-er så at

$$\mathbf{x}_0 = \mathbf{x}(t_0) = S \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t_0} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t_0} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t_0} \end{pmatrix},$$

eller

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t_0} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t_0} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t_0} \end{pmatrix} = S^{-1}\mathbf{x}_0,$$

hvorfra vi uden videre kan bestemme α-erne pladsvis.

Dette væsentlige resultat er først og fremmest frembragt ved hjælp af metoderne fra lineær algebra, men bagved det hele ligger det afgørende moment at *differentiation foregår lineært*, dvs den afledede af en linearkombination af funktioner er lig samme linearkombination af funktionernes afledede.

Lad det endnu engang være understreget, at forudsætningerne for at denne behandling er mulig, er at A kan diagonaliseres. Det fordrer at det karakteristiske polynomium har 'tilstrækkelig mange' rødder (reelle eller komplekst konjugerede) - regnet med multiplicitet - til at der kan findes en basis for R^n (eller C^n) af egenvektorer for A. Dette kommer ud på at summen af egenværdiernes geometriske multiplicitet er lig n. Hertil skal bemærkes, at vi når der er en basis for C^n af egenvektorer for A, vil der i løsningerne (11.2) til det oprindelige system optræde komplekse α-er foran nogle af komponentfunktionerne. Dette vil vi se nærmere på i et par eksempler lidt senere.

Imidlertid er det også muligt at løse andre klasser af 1. ordens lineære differentialligninger med konstante koefficienter, hvor koefficientmatricen ikke giver egenværdier med geometrisk multiplicitet n. Vi må dog afstå fra at give en systematisk behandling af disse tilfælde.

Vi foretager en omskrivning af løsningsforskriften (11.2) så, at

$$\mathbf{x}(t) = S(\alpha_1 \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}), \quad t \in R,$$

og ved videre anvendelse af reglerne for matrixregning når vi til

$$\mathbf{x}(t) = \alpha_1 S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 S \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

Dette viser, at enhver løsning $\mathbf{x}$ til differentialligningen er en linearkombination af løsningerne - skrevet lidt uformelt:

$$S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; S \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \; \ldots, \; S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

som dermed *udspænder løsningsmængden. Disse løsninger er også lineært uafhængige.* Antag nemlig, at nulvektorfuntionen 0 er fremstillet som linearkombination af dem, så at det for ethvert $t \in R$ gælder

$$0 = \alpha_1 S \begin{pmatrix} e^{\lambda_1 t} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \alpha_2 S \begin{pmatrix} 0 \\ e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} + \ldots + \alpha_n S \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}.$$

Ved at sætte S uden for parentesen og atter samle de linearkombinerede søjler til én, finder vi at der til ethevrt t gælder

$$0 = S \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix},$$

Da S som koordinatskiftematrix er invertibel kan vi multiplicere med S^{-1} fra venstre på begge sider, hvorved

$$0 = S^{-1} 0 = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t} \end{pmatrix}, \quad t \in R.$$

Dette kan som før kun være opfyldt hvis alle α-erne er 0, er de betragtede løsninger lineært uafhængige. De udgør derfor en *basis* for løsningsrummet. Også i dette tilfælde har vi derfor indset at *løsningerne til det homogene differentialligningssystem* $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ *udgør et n-dimensionalt underrum i* $\mathbf{C}_n(R)$.

Eksempel 4

Lad os betragte det homogene differentialligningssystem

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

I eksempel 4 på side 105 fandt vi egenværdierne for koefficientmatricen til $\lambda = 5$ og $\lambda = -1$ (dobbeltrod). Vi fandt også at den kunne diagonaliseres af koordinatskiftematricen

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efter de netop opnåede resultater har differentialligningssystemet løsningerne

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{5t} \\ \alpha_2 e^{-t} \\ \alpha_3 e^{-t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{5t} - \alpha_2 e^{-t} - \alpha_3 e^{-t} \\ \alpha_1 e^{5t} + \alpha_2 e^{-t} \\ \alpha_1 e^{5t} + \alpha_3 e^{-t} \end{pmatrix},$$

hvor $t \in R$. Kontrollér selv ved differentiation at resultatet passer.

Eksempel 5

Lad os betragte det homogene differentialligningssystem

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

I eksempel 1 på side 111 fandt vi at koefficientmatricen havde de komplekse egenværdier $\lambda = 1+i$ og $\lambda = 1-i$. Vi fandt også at den kan diagonaliseres af koordinatskiftematricen

$$S = \begin{pmatrix} i & -i \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Efter de opnåede resultater har differentialligningssystemet løsningerne

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{(1+i)t} \\ \alpha_2 e^{(1-i)t} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i(\alpha_1 e^{(1+i)t} - \alpha_2 e^{(1-i)t}) \\ \alpha_1 e^{(1+i)t} + \alpha_2 e^{(1-i)t} \end{pmatrix}, \tag{11.3}$$

hvor $t \in R$ og hvor α-erne er komplekse tal. Dette udtryk med de komplekse tal og funktioner bliver ret hurtigt uoverskueligt. Benyttes imidlertid et andet udtryk for den komplekse eksponentialfuntion, da

$$e^{(a+ib)t} = e^{at}(cos(bt) + i\, sin(bt)),$$

og indsætter vi dette udtryk i løsningerne (11.3) - med $a = 1$ og $b = 1$ henholdsvis $a = 1$ og $b = -1$ - bliver

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} ie^t(\alpha_1(cost + i\, sint) - \alpha_2(cost - i\, sint)) \\ e^t(\alpha_1(cost + i\, sint) + \alpha_2(cost - i\, sint)) \end{pmatrix} \\ &= e^t \begin{pmatrix} i(\alpha_1 - \alpha_2)cost - (\alpha_1 + \alpha_2)sint \\ (\alpha_1 + \alpha_2)cost + i(\alpha_1 - \alpha_2)sint \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Vælger vi nu de to komplekse α-er som komplekst konjugerede ($\alpha_2 = \overline{\alpha}_1$), fx $2\alpha_1 = p-iq$ og $2\alpha_2 = p + iq$, bliver $\alpha_1 + \alpha_2 = p$ og $i(\alpha_1 - \alpha_2) = q$, og da bliver løsningerne

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = e^t \begin{pmatrix} qcost - psint \\ pcost + qsint \end{pmatrix} = pe^t \begin{pmatrix} -sint \\ cost \end{pmatrix} + qe^t \begin{pmatrix} cost \\ sint \end{pmatrix}.$$

Vi har nu et sæt af reelle løsningsfunktioner som udspænder løsningsrummet, og - som vi straks skal se - er lineært uafhængige. Lad os derfor betragte 0-funktionen fremstillet som linearkombination af de to vektorfunktioner, dvs

$$0 = \alpha e^t \begin{pmatrix} -sint \\ cost \end{pmatrix} + \beta e^t \begin{pmatrix} cost \\ sint \end{pmatrix}, \; t \in R.$$

Da $e^t \neq 0$(-funktionen) bliver $-\alpha sint + \beta cost = 0$ og $\alpha cost + \beta sint = 0$, som jo gælder for alle t - specielt for $t = 0$. Dette giver $\alpha = 0$ og $\beta = 0$. Vi har således vist at de to vektorfunktioner er lineært uafhængige, og dermed vil løsningerne til det oprindelige, homogene differentialligningssystem af to variable funktioner udspænde et 2-dimensionalt underrum i $\mathbf{C}_2(R)$. *

Dette eksempel viser nogle generelle træk ved de lineære 1. ordens differentialligningssystemer med konstante koefficienter, hvor koefficientmatricen har reelle elementer, men komplekse egenværdier. Vi kan for sådanne systemer - hvis matricen kan diagonaliseres inden for C^n - altid finde en basis af *reelle* vektorfuntioner som udspænder løsningsrummet. Og hvis vi kun ønsker samtlige reelle løsninger, kan vi nøjes med alle *reelle* linearkombinationer af disse vektorfunktioner.

At dette fælles træk opstår skal vi finde i det faktum, at det karakteristiske polynomium for den reelle koefficientmatrix får komplekse egenværdier i par af komplekst konjugerede egenværdier. Hertil kommer at de tilhørende egenvektorer også altid kan vælges som komplekst konjugerede. Og derfor kan vi for hver af sådanne 'sammenhørende' sæt af egenværdier/-vektorer foretage en omskrivning som er analog til eksempel 5 - men ofte mere kompliceret, alene af den grund at a og b er forskellige fra 1. Vi kan vende tilbage til denne problemstilling i næste afsnit samt i en af projektopgaverne.

Vi er nu i stand til at løse en omfattende klasse af 1. ordens lineære homogene differentialligningssystemer. Hvad kan vi stille op med de tilsvarende **inhomogene** systemer af formen

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \underline{b},$$

hvor $\underline{b}$ er en ikke-triviel konstant, dvs $\underline{b} \neq \underline{0}$ i R^n? Jo, først og fremmest kan vi konstatere, at to vektorfunktioner $\mathbf{x}$ og $\mathbf{x}_0$ er løsninger til dette inhomogene system, hvis og kun hvis deres differens er en løsning til det tilsvarende homogene system. Da

$$A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)' = A\mathbf{x}' - A\mathbf{x}_0' = (A\mathbf{x} + \underline{b}) - (A\mathbf{x}_0 + \underline{b}) = A\mathbf{x} - A\mathbf{x}_0 = A(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0).$$

Betegner vi løsningsrummet for det homogene system med L_h og for det inhomogen med L_{ih}, har vi altså fundet: Hvis $\mathbf{x}_0 \in L_{ih}$ gælder, at $\mathbf{x} \in L_{ih}$ hvis og kun hvis $\mathbf{x} - \mathbf{x}_0 \in L_h$.

Det indebærer at hvis vi blot kender én enkelt løsning - en **partikulær** løsning - til det inhomogene system, fx $\mathbf{x}_0$, får vi samtlige løsninger ved til den partikulære løsning at lægge løsningsrummet for det homogene system. Vi kan formulere dette som en sætning.

Sætning 11.1
Løsningsmængden L_{ih} for det inhomogene differentialligningssystem $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \underline{b}$ er sideunderrummet til L_h gennem en vilkårlig partikulær løsning $\mathbf{x}_0$ til det inhomogene system, dvs

$$L_{ih} = L_h + \mathbf{x}_0.$$

Såfremt der findes en konstant vektor $\underline{c} \in R^n$ så $A\underline{c} = -\underline{b}$ - det drejer sig altså om at løse et sædvanligt ligningssystem - vil den konstante funktion $\mathbf{x}$, givet ved $\mathbf{x}(t) = \underline{c}$ for $t \in R$, være en partikulær løsning til det inhomogene system. Indsættes dette i det inhomogene system får vi jo, at

$$\mathbf{x}'(t) = (\underline{c})' = 0 = -\underline{b} + \underline{b} = A\underline{c} + \underline{b} = A\mathbf{x} + \underline{b}.$$

Denne mulighed indtræffer altid hvis A er invertibel. I så fald kan vi ved at vælge $\underline{c} = -A^{-1}\underline{b}$ angive en konstant, partikulær løsning til det inhomogene system, nemlig vektorfunktionen givet ved $\mathbf{x}(t) = -A^{-1}\underline{b}$ for alle $t \in R$. Dette kan så kombineres med resultetet for løsning af homogene systemer, hvor koefficientmatricen kan diagonaliseres. Derved opstår resultatet:

Sætning 11.2
Hvis matricen A er diagonaliserbar, og hvis der desuden findes en vektor $\underline{c}$ så at $A\underline{c} = -\underline{b}$ - fx tilfældet hvis A er invertibel - er alle løsninger til det lineære 1. ordens differentialligningssystem $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \underline{b}$ givet på formen

$$\mathbf{x}(t) = S \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{\lambda_1 t_0} \\ \alpha_2 e^{\lambda_2 t_0} \\ \vdots \\ \alpha_n e^{\lambda_n t_0} \end{pmatrix} + \underline{c},$$

hvor α-erne er vilkårlige reelle (eller komplekse) tal, og $t \in R$.

Dette resultat dækker også det homogene tilfælde, da vi for $\underline{b} = \underline{0}$ genfinder det tidligere opnåede. En konstant løsning til et differentialligningssystem kaldes ofte en **ligevægtsløsning** .

Eksempel 4 (fortsat)

Vi kikker nu på det inhomogene system

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

Eftersom A er invertibel, med

$$A^{-1} = \frac{1}{5}\left(\begin{array}{rrr} -3 & 2 & 2 \\ 2 & -3 & 2 \\ 2 & 2 & -3 \end{array}\right),$$

kan vi udnytte sætningen ovenfor. Vi finder samtlige løsninger til det inhomogene system:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{5t} \\ \alpha_2 e^{-t} \\ \alpha_3 e^{-t} \end{pmatrix} - A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix},$$

hvor $t \in R$ og $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in R$. Ved indsættelse af udtrykkene for S og A^{-1} opnås

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_1 e^{5t} - \alpha_2 e^{-t} - \alpha_3 e^{-t} \\ \alpha_1 e^{5t} + \alpha_2 e^{-t} \\ \alpha_1 e^{5t} + \alpha_3 e^{-t} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

med $t \in R$ og hvor $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ er reelle tal.

Det aktuelle resultat kunne imidlertid også være opnået på en anden måde. Hvis vi bemærker at det inhomogene led, dvs vektoren $(5, 5, 5)$ er en egenvektor for A svarende til egenværdien $\lambda = 5$, og da $\lambda^{-1} = \frac{1}{5}$ vil være egenværdi for A^{-1} svarende til samme egenvektor, vil

$$-A^{-1} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -\frac{1}{5} \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. *$$

Eksempel 5 (fortsat)

Nu betragter vi det inhomogene system

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Eftersom matricen er invertibel, med

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix},$$

kan vi igen benytte sætningen ovenfor, og vi får at samtlige løsninger til det inhomogene system er:

$$\begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix} = pe^t \begin{pmatrix} -sint \\ cost \end{pmatrix} + qe^t \begin{pmatrix} cost \\ sint \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

med $t \in R$ og hvor p, q er vilkårlige reelle tal.

Også her kunne den inhomogene løsning være fundet på den anden måde - selv om det her er mindre gennemskueligt. Den inhomogene vektor er faktisk sum af de to fundne egenvektorer for koefficientmatricen, dvs

$$\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix}.$$

Når vi derfor lader den inverse koefficientmatrix - lad os kalde den A^{-1} - virke på denne sum, skal de reciprokke egenværdier virke på de to egenvektorer, så

$$\begin{aligned} A^{-1}\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} &= A^{-1}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} + A^{-1}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{1+i}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} + \frac{1}{1-i}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} \\ &= \frac{1-i}{2}\begin{pmatrix}i\\1\end{pmatrix} + \frac{1+i}{2}\begin{pmatrix}-i\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}. * \end{aligned}$$

Den her benyttede måde er i princippet brugbar i alle tilfælde, men det forudsætter så at vi skal fremstille den inhomogene vektor som linearkombination af egenvektorerne for koefficientmatricen, hvilket ikke nødvendigvis bliver simplere.

11.5 Par af første ordens lineære differentialligninger

I mange simple anvendelser af den udviklede teori for systemer af første ordens differentiallinger optræder ofte to koblede differentialligninger. Der kan derfor være en pointe i at studere et generelt system af to lineære første ordens differentialligninger på formen

$$\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}a & b\\c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix},$$

hvor a, b, c, d er vilkårlige reelle konstanter. Koefficientmatricen for dette system betegnes kort A. Det karakteristiske polynomium for dette system er $(a-\lambda)(d-\lambda) - bc = \lambda^2 - (a+d)\lambda + (ad-bc)$ med diskeminanten $D = (a+d)^2 - 4(ad-bc) = (a-d)^2 + 4bc$. Løsningsforholdene falder i tre forskellige klasser - afhængigt af D's humør (fortegn). Vi behandler én klasse ad gangen.

1. $D > 0$. I dette tilfælde er der to forskellige reelle egenværdier - med tilhørende lineært uafhængige egenvektorer - og derfor falder denne klasse ind under den allerede behandlede teori. Lorenzen-modellen i eksempel 2 falder ind under dette tilfælde.

2. $D = 0$. Da vil vi få at $(a-d)^2 + 4bc = 0$ eller anderledes udtrykt $bc = -\frac{1}{4}(a-d)^2$. Der vil således være én reel dobbeltrod $\lambda = \frac{a+d}{2}$, og egenvektorerne for A svarende til denne egenværdi findes som løsning til ligningssystemet

$$\begin{pmatrix}a - \frac{a+d}{2} & b\\ c & d - \frac{a+d}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\frac{a-d}{2} & b\\ c & -\frac{a-d}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}u\\v\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

eller

$$(a-d)u + 2bv = 0 \qquad \text{og} \qquad 2cu - (a-d)v = 0. \tag{11.4}$$

Her optræder flere undertilfælde.

2a. Hvis $c = 0$ får vi af identiteten $bc = -\frac{1}{4}(a-d)^2$, at $a = d$. Hvis også $b = 0$ vil A faktisk være en diagonalmatrix fra begyndelsen, og så er vi tilbage i grundtilfældet. Mere interessant er tilfældet $b \neq 0$, hvoraf vi får at ligningssystemet (11.4) vil få løsningerne $v = 0$ og u kan vælges frit i R. Egenrummet bliver således éndimensionalt, og vi kan ikke finde to lineært uafhængige egenvektorer for A. *Men vi klarer os endda.* Differentialligningssystemet har nu skikkelsen

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},$$

eller skrevet ud som enkeltligninger

$$\begin{aligned} x_1'(t) &= ax_1(t) + bx_2(t) \\ x_2'(t) &= ax_2(t). \end{aligned}$$

Her kan vi let løse den sidste ligning, som kun omhandler x_2. Vi får $x_2(t) = \alpha_2 e^{at},\ t \in R$, og hvor α_2 er et vilkårligt reelt tal. Dette kan vi nu indsætte i den første differentialligning, som herefter kun omhandler x_1

$$x_1'(t) = ax_1(t) + b\alpha_2 e^{at}.$$

Bruger vi nu indskud 3 på side 128 får vi følgende løsning til denne differentialligning

$$x_1(t) = e^{at}(\int_{t_0}^{t} b\alpha_2 e^{at} e^{-at}\ dt + \alpha_1) = e^{at}(\alpha_2 bt + \alpha_1), \quad t \in R.$$

Når nu $c = 0,\ b \neq 0$ kan vi konkludere at løsningen til differentialligningssystemet er

$$\begin{aligned} x_1(t) &= e^{at}(\alpha_2 bt + \alpha_1) \\ x_2(t) &= \alpha_2 e^{at}, \end{aligned}$$

$t \in R,\ \alpha_1, \alpha_2 \in R.$

2b. Hvis $c \neq 0$, finder vi igen at egenrummet for den eneste egenværdi $\lambda = \frac{a+d}{2}$ er éndimensionalt, og at det er udspændt af vektoren

$$\begin{pmatrix} a-d \\ 2c \end{pmatrix}$$

- check det selv ved at løse ligningssystemet (11.4). Ej heller denne gang kan vi diagonalisere A. Men erfaringerne fra tilfældet **2a** viser at vi kan klare os med mindre. Kan vi nemlig finde en koordinatskiftematrix S, så at

$$S^{-1}AS = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 1 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} = J,$$

kan vi komme igennem med den samme teknik som i tilfældet **2a**, men en sådan matrix findes faktisk. Regnearbejdet er ikke større end at man kan regne sig frem - men i appendiks A.2 kan man i et miniprojekt godtgøre, at vi altid kan finde en sådan basisskiftematrix, hvis den algebraiske og den geometriske multiplicitet ikke er ens. Vi finder fx at

$$S = \begin{pmatrix} a-d & 2 \\ 2c & 0 \end{pmatrix}.$$

Kontrollér selv ved udregning at $AS = SJ$. Heraf følger det ønskede, da S er invertibel - $detS = -4c$.

Benytter vi nu den fundne matrix S til at skrive $\mathbf{x} = S\mathbf{y}$, får vi at differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = A \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

er ensbetydende med det transformerede differentialligningssystem

$$S \begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = AS \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix},$$

men dette system kan vi skrive

$$\begin{pmatrix} y_1' \\ y_2' \end{pmatrix} = S^{-1}AS \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{a+d}{2} & 1 \\ 0 & \frac{a+d}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

Et system vi rent faktisk har løst i undertilfælde **2a** - her har vi blot $\frac{a+d}{2}$ i a's rolle og 1 i b's rolle Vi opnår derfor

$$\begin{aligned} y_1(t) &= e^{\frac{a+d}{2}t}(\alpha_2 t + \alpha_1) \\ y_2(t) &= \alpha_2 e^{\frac{a+d}{2}t}, \end{aligned}$$

$t \in R$ og $\alpha_1, \alpha_2 \in R$. Løsningerne til det oprindelige system får vi så ved at transformere y-erne med S:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = S \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a-d & 2 \\ 2c & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{\frac{a+d}{2}t}(\alpha_2 t + \alpha_1) \\ \alpha_2 e^{\frac{a+d}{2}t} \end{pmatrix}.$$

Udfører vi nu den sidste multiplikation kan vi fastslå - da $c \neq 0$ - at løsningerne til det betragtede system bliver

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = e^{\frac{a+d}{2}t} \begin{pmatrix} \alpha_1(a-d) + \alpha_2((a-d)t + 2) \\ 2c(\alpha_1 + \alpha_2 t) \end{pmatrix},$$

hvor $t \in R$ og α_1, α_2 er vilkårlige reelle konstanter.

3. D<0 Da vil systemet have to komplekst konjugerede egenværdier, og det er tilsvarende muligt at vælge to komplekst konjugerede egenvektorer. De to egenværdier bliver

$$\lambda_1 = \frac{a+d}{2} + i\frac{\sqrt{-D}}{2} \quad \text{og} \quad \overline{\lambda}_1 = \frac{a+d}{2} - i\frac{\sqrt{-D}}{2}$$

hvor jo $D = (a-d)^2 + 4bc < 0$. Indsættes λ_1 i egenvektorligningen $(A - \lambda E)\underline{x} = \underline{0}$, finder vi at

$$
\begin{aligned}
(\frac{a-d}{2} - i\frac{\sqrt{-D}}{2})u + bv = 0 \\
cu - (\frac{a-d}{2} + i\frac{\sqrt{-D}}{2})v = 0,
\end{aligned}
$$

hvoraf vi finder den første af de to komplekst konjugerede egenvektorer, mens den anden følger automatisk, dvs

$$
\underline{v}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} + i\frac{\sqrt{-D}}{2} \\ c \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad \overline{\underline{v}}_1 = \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} - i\frac{\sqrt{-D}}{2} \\ c \end{pmatrix}.
$$

Herefter kan vi igen løse det transformerede system $\mathbf{y}' = S^{-1}AS\mathbf{y}$, og når vi tillige benytter at $e^{(p+iq)t} = e^{pt}(cos(qt) + isin(qt))$ får vi

$$
\begin{pmatrix} y_1(t) \\ y_2(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{\frac{a+d}{2}t}c_1(cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) + isin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t)) \\ e^{\frac{a+d}{2}t}c_2(cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) - isin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t)) \end{pmatrix},
$$

hvor $t \in R$, og hvor c_1, c_2 er vilkårlige komplekse tal. Vi kan nu beregne samtlige løsninger til det oprindelige system af

$$
\begin{aligned}
\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} &= S \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} \\
&= e^{\frac{a+d}{2}t} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2} + i\frac{\sqrt{-D}}{2} & \frac{a-d}{2} - i\frac{\sqrt{-D}}{2} \\ c & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1(cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) + isin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t)) \\ c_2(cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) - isin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t)) \end{pmatrix},
\end{aligned}
$$

der videre vil give os den komplicerede matrix

$$
e^{\frac{a+d}{2}t} \begin{pmatrix} (c_1+c_2)(\frac{a-d}{2}cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) - \frac{\sqrt{-D}}{2}sin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t)) + i(c_1-c_2)(\frac{a-d}{2}sin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) + \frac{\sqrt{-D}}{2}cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t)) \\ c(c_1+c_2)cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) + ic(c_1-c_2)sin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) \end{pmatrix}.
$$

Vælger vi nu som i eksempel 5 på side 133 de to komplekse tal c_1, c_2 komplekst konjugerede, fx $2c_1 = \alpha_1 - i\alpha_2$ og $2c_2 = \alpha_1 + i\alpha_2$, bliver $c_1 + c_2 = \alpha_1$ og $i(c_1 - c_2) = \alpha_2$, og vi får herefter samtlige *reelle løsninger* til det oprindelige system på formen

$$
e^{\frac{a+d}{2}t} \begin{pmatrix} \frac{a-d}{2}cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) - \frac{\sqrt{-D}}{2}sin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) & \frac{a-d}{2}sin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) + \frac{\sqrt{-D}}{2}cos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) \\ ccos(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) & csin(\frac{\sqrt{-D}}{2}t) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}.
$$

Øvelse: Opskriv samtlige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$
\begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & -b \\ 4b & a \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix},
$$

når a og b er vilkårlige reelle tal. •

A Miniprojekter på Matematik B

A.1 Reelle løsninger til reelle, lineære differentialligningssystemer

Formålet med dette miniprojekt er at beskrive den situation, hvor løsningen af et reelt, lineært 1. ordens differentialligningssystem vil involvere komplekse egenværdier og egenvektorer.

a) Betragt en reel 2×2-matrix A og differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t). \tag{A.1}$$

Vi antager endvidere at A har de komplekst konjugerede egenværdier egenværdier $\lambda = a + ib$ og $\overline{\lambda}$ med det tilhørende egenvektorer $\underline{u}$ og $\overline{\underline{u}}$. Anvend nu transformationen $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{y}(t)$ på systemet (A.1), når S er den basisskiftematrix der diagonaliserer A - hvordan ser søjlerne i S ud? Opskriv det transformerede differentialligningssystem i $\mathbf{y}(t)$ og fastlæg samtlige løsninger til dette differentialligningssystem.

b) Vis dernæst at samtlige løsninger til det oprindelige system (A.1) vil blive på formen

$$\mathbf{x}(t) = e^{at}(c_1\underline{u}e^{ibt} + c_2\overline{\underline{u}}e^{-ibt}) \;\; hvor \;\; c_1, c_2 \in C.$$

c) Benyt nu $\underline{u} = \underline{u}_1 + i\underline{u}_2$ og $e^{ibt} = cos(bt) + isin(bt)$ til at vise, at vi for passende valg af de komplekse tal c_1, c_2 kan opskrive samtlige løsninger til (A.1) som en reel vektorfunktion.

d) Opskriv på denne baggrund samtlige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -5 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{pmatrix}.$$

e) Betragt nu en reel $n \times n$-matrix A som kan diagonaliseres inden for C^n med reelle eller komplekst konjugerede egenværdier. Vi skal nu løse differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t). \tag{A.2}$$

Foretag igen transformationen $\mathbf{x}(t) = S\mathbf{y}(t)$, hvor søjlerne i S består af egenvektorerne for A opskrevet i netop samme rækkefølge hvor egenværdierne optræder i den diagonaliserede matrix. Der skal nu redegøres for, hvordan løsningerne for det transformerede differentialligningssystem ser ud.

f) Redegør endelig for hvordan vi i princippet finder samtlige reelle løsninger for det oprindelige system (A.2).

g) Fastlæg samtlige reelle løsninger til differentialligningssystemet

$$\begin{pmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \\ x_3'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & -2 & -9 \\ -1 & 1 & -3 \\ 1 & 1 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \\ x_3(t) \end{pmatrix}.$$

Matricen er behandlet i eksempel 2 på side 113.

h) Find endelig *den* reelle løsning til differentialligningssystemet

$$\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}(t),$$

hvor

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -5 & 0 & 0 \\ 5 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \end{pmatrix},$$

og som går gennem punktet $\mathbf{x}(\frac{\pi}{4}) = (1, -1, -1, 1)e^{\frac{\pi}{4}}$.

A.2 Multiple egeneværdier

Formålet med dette miniprojekt er at beskrive den situation, hvor den geometriske og den algebraiske multiplicitet for en egenværdi er forskellige. Del 1 skal besvares, mens del 2 kan besvares hvis I har tid.

Del 1.

Betragt en lineær afbildning $F : R^n \to R^n$. Det forudsættes at F har $n-1$ forskellige egenværdier, $\lambda_2, \lambda_3, \ldots, \lambda_n$, hvor λ_2 har algebraisk multiplicitet 2.

a) Gør rede for at $\lambda_3, \ldots, \lambda_n$ alle har både geometrisk og algebraisk multiplicitet 1.

b) Vis at der findes en basis $\underline{b}_1, \underline{b}_2, \ldots, \underline{b}_n$, så F i forhold til denne basis vil have en matrix af formen

$$A = \begin{pmatrix} a_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ a_2 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ a_3 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_n & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

c) Gør rede for at A og F har samme karakteristisk polynomium og vis ud fra dette resultat at $a_1 = \lambda_2$.

d) Fastlæg koefficienterne $d_3, \ldots, d_n$, sådan at vektoren

$$\underline{w} = \underline{b}_1 + \sum_{i=3}^{n} d_i \underline{b}_i$$

har billedet $F(\underline{w}) = \lambda_2 \underline{w} + a\underline{b}_2$, hvor tallet a endnu ikke er fastlagt. (Det anbefales at opstille de ligninger som tallene d_i hver for sig skal opfylde.)

e) Find en basis $\underline{c}_1, \underline{c}_2, \ldots, \underline{c}_n$, så F i forhold til denne basis er givet ved en matrix af formen

$$J = \begin{pmatrix} \lambda_2 & 0 & 0 & \ldots & 0 \\ 1 & \lambda_2 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_3 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Det anbefales at benytte en basis, hvor $\underline{c}_i = \underline{b}_i$ for $i > 2$.

f) Vis - ud fra matricen J - at $(F - \lambda_2 I_n)(\underline{c}_1) = \underline{c}_2$ samt at $(F - \lambda_2 I_n)^2(\underline{c}_1) = \underline{0}$, hvor I_n er den identiske afbildning på R^n. Bemærk at dette betyder at $\underline{c}_2 \in N(F - \lambda_2 I_n)$, men at $\underline{c}_1 \notin N(F - \lambda_2 I_n)$, hvor jo $N(F - \lambda_2 I_n)$ er egenrummet for F svarende til egenværdien λ_2, jfr side 102.

g) To lineære afbildninger F_1 og F_2 er givet ved matricerne

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{henholdvis} \quad A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Find nu for F_1 henholdsvis F_2 en basis i R^3 så den til afbildningen svarende matrix kommer på formen J.

Del 2.

a) Undersøg det tilfælde hvor en lineær afbildning $G : R^n \to R^n$ har en egenværdi μ med algebraisk multiplicitet 3 samt yderligere $n-3$ egenværdier der alle er forskellige. Hvordan vil J-matricen se ud, såfremt den *geometriske multiplicitet* af μ er 1, 2 henholdsvis 3?

b) Undersøg det tilfælde hvor en lineære afbildning $G : R^4 \to R^4$ har to egenværdier der begge har algebraisk multiplicitet 2 og geometrisk multiplicitet 1. Hvordan vil J-matricen tage sig ud i dette tilfælde?

c) To lineære afbildninger G_1 og G_2 er givet ved matricerne

$$B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 3 \end{pmatrix} \quad \text{og} \quad B_2 = \begin{pmatrix} 7 & -6 & -8 & 1 \\ 2 & -1 & -4 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

Find for de to afbildninger en basis i R^3 henholdsvis i R^4 så den til afbildningen svarende matrix kommer på formen J.

A.3 Gauss-elimination

Formålet med dette miniprojekt er fremstille et computerprogram som kan løse et system af lineære ligninger samt en tilhørende dokumentation.

a) I skal skrive et program som kan løse ligningssystemer af formen.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ n \end{pmatrix}.$$

Start med tilfældet $n = m$. Der er to principielle problemer som programmet her skal håndtere. Det ene (punkt *b)*) er velbeskrevet i bogen, mens det andet (punkt *c)*) kun er berørt sporadisk.

b) Selv om vi arbejder ud fra $n = m$ er det muligt at matricen er singulær. Der kan derfor være både ingen løsninger og uendelig mange løsninger. Disse problemer er behandlet i bogen, men i første omgang kan I blot lade programmet meddele hvilken situation der er opstået og så standse.

c) I eksempel 3 på side 21 har vi antydningsvis set behovet for at kunne bytte rækkefølgen af ligningerne i ligningssystemet. Aktuelt optræder der i eksempel 3 - efter to gange Gauss-elimination - ligningssystemet

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Her kan vi ikke skabe et 0 på anden plads i tredie række ved at fratrække at passende multiplum af anden række, dvs at erstatte r_3 med $r_3 - {}^{a_{32}}/_{a_{22}} r_2$. I dette tilfælde vil det jo føre til at vi skal dividere med 0!! I det aktuelle eksempel kan problemet klares blot ved at bytte om på rækkefølgen af de to ligninger - dvs på rækkerne i koefficientmatricen og i $\underline{b}$-matricen. Dette er et mindre problem ved den *algoritme* I skal lave, og den ændrer jo ikke noget ved ligningssystemets løsninger.

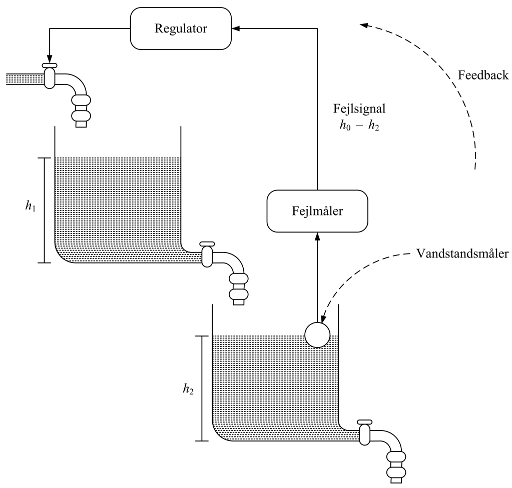
Problemer af denne type undgås ved at benytte *pivotering*, hvor man bytter om på to rækker i matricen indtil det element man skal dividere med - fx a_{11} - bliver det størst mulige element i den søjle vi ønsker at skabe 0-er i. Så undgår vi også problemer med store afrundingsfejl, hvis nu det oprindelige a_{11} var meget lille. Pivotering er bla omtalt i bogen **Conte and de Boor:** *Elementary Numerical Analysis*, 3^{rd}Ed. (McGraw-Hill, New York, 1980). I afsnit 4.2 beskrives den algoritme til løsning af lineære ligninger som I kender fra denne bog, og i afsnit 4.3 diskuteres de numeriske problemer omkring pivotering.

d) I kan nu udvide programmet til også at angive den eller de korrekte løsninger - eller ingen løsning!

e) Hvis I kan nå mere kan I også udvide programmet til det generelle tilfælde - $n \neq m$.

A.4 Modellering af vandtilførslen til en vandturbine

I dette miniprojekt skal vi forestille os at en vandturbine drives af vand, der strømmer ud af et kar som er det nederste af to kar. Det skal anskues som idealiserede opdæmmede vandreservoirer anbragt i forskellig højde i naturen - der er altså reelt tale om opdæmmede bjergsøer eller lignende - se figur A.1.



Figur A.1 Et 'sølandskab'.

Der tilføres vand til det øverste kar i en principielt ubegrænset mængde, og vandet løber drevet af tyngdekraften ud af dette kar gennem en hane og direkte i det nederste kar. På tilsvarende måde løber vandet ud af det nederste kar og ned på turbinebladene. Systemet opererer sådan at der altid skal være en bestem vandstand i det nederste kar. Det tænkes opnået ved, at der sendes signaler fra en vandstandsmåler i dette kar op til en regulator, som automatisk ændrer indstillingen af inputhanen til det øverste kar, hvis den faktiske vandstand i det nederste kar afviger fra den ønskede. Vi har altså at gøre med en feed-back mekanisme. Bundhanerne i de to kar tænkes indstillet manuelt, men i en fast position i det tidsinterval vi studerer.

a) Opstil nu en differentiallingsmodel for dette system. Vandhøjden i de to kar vil utvivlsomt være de ukendte funktioner i denne model. Det kan lette arbejdet først at opstlle modellen for det uregulerede system, og derefter at udbygge den til det regulerede system.

b) Bestem først en partikulær løsning til det opstillede differentialligningssystem.

c) Vi skal herefter finde den fuldstændige løsning til differentialligningssystemet. Det vil være naturligt at finde egenværdierne for det homogene system - ved alle mulige valg af diskeminanten - og herefter benytte de løsningsmetoder der blev udviklet i kapitel 11.

d) Vi skal nu beskrive hvordan systemet vil udvikle sig - ifølge modellen. Antag for nemheds skyld at begge reservoirer er tomme, når vi starter - dvs $h_1(0) = 0$ og $h_2(0) = 0$ - og undersøg hvordan systemet vil udvikle sig, når $t \to \infty$.

Stikord